

Exploración de nuevos vacíos en la variedad de Calabi-Yau $X(2,2,2,2)$

New vacua exploration on $X(2,2,2,2)$ Calabi-Yau Manifold.

Nada Geraldine Cabo Bizet¹, Oscar Gerardo Loaiza Brito², Félix Ibarra Castor³, Saúl Ruano Sanchez⁴, José de Jesús Pérez Lona⁵, Annette Itzel Torres Vázquez⁶

^{1,2,4,5,6}Universidad de Guanajuato. División de Ciencias e Ingenierías ³Universidad Autónoma de Zacatecas. Unidad Académica de Física
nana@fisica.ugto.mx¹ oloaiza@fisica.ugto.mx² felix.778607@fisica.uaz.edu.mx³ ruanoss2019@licifug.ugto.mx⁴
jdi.perezlona@fisica.ugto.mx⁵ torresva2017@licifug.ugto.mx⁶

Resumen

La Teoría de Cuerdas hasta ahora ha sido la mejor candidata a una teoría física capaz de describir las fuerzas fundamentales de la naturaleza, con la ventaja característica de que una de ellas, la gravedad, emerge de la propia construcción matemática. En principio esta teoría establece que la dimensionalidad para que sea válida es $D = 26$, sin embargo el desarrollo posterior de la teoría de supercuerdas reduce esta cantidad a 10 dimensiones, donde 6 de ellas estarían compactificadas en objetos conocidos como variedades de Calabi-Yau, las cuatro dimensiones restantes corresponden a las dimensiones espacio temporales ya definidas en la física, tres dimensiones espaciales y una temporal. Se presentarán las ideas y conceptos fundamentales de la teoría de cuerdas, una construcción detallada de los cimientos matemáticos de los objetos donde se encuentran las dimensiones extra, las variedades de Calabi-Yau, y se explorarán nuevos vacíos referidos al problema de espacios moduli de una variedad específica de Calabi-Yau, la variedad espejo $X(2,2,2,2)$, a la hora de compactificar la teoría de cuerdas tipo IIB.

Palabras clave: Calabi-Yau; compactificación de flujos, teoría de cuerdas, conjeturas de gravedad cuántica.

Introducción

Hasta ahora, el mundo que conocemos se ha descrito parcialmente mediante dos enfoques distintos. Por un lado, la teoría de la Relatividad General describe el universo a grandes escalas, abarcando fenómenos gravitacionales y la estructura del espacio-tiempo. Por otro lado, la Mecánica Cuántica rige el mundo microscópico, tratando con partículas subatómicas y sus interacciones. A pesar de estos avances, todavía no hemos logrado establecer una teoría fundamental que integre ambos marcos teóricos y proporcione una descripción física completa de la naturaleza. La búsqueda de una teoría unificada, que pueda abarcar todas las interacciones fundamentales de la naturaleza, sigue siendo uno de los desafíos más ambiciosos en la física.

A lo largo de décadas, los científicos han desarrollado numerosos enfoques y teorías en un intento por alcanzar esta unificación. Sin embargo, hasta el momento, ninguna teoría ha sido aceptada como la teoría unificada definitiva. La comunidad científica sigue trabajando para encontrar una descripción coherente y completa que abarque la gravedad a gran escala y las peculiaridades cuánticas del mundo subatómico.

Origen de la Teoría de Cuerdas

En esta sección discutiremos el origen de la teoría de cuerdas y sus implicaciones en la física teórica gracias a la idea de compactificación de dimensiones extra necesarias para la consistencia de la teoría, esto nos permitirá dar paso a las variedades estudiadas donde se realiza esta compactificación.

La Teoría de Cuerdas, surgida en los años 60, fue concebida como un intento de comprender la naturaleza de la interacción nuclear fuerte. Esta fuerza es la responsable de mantener unidos los neutrones y protones dentro del núcleo atómico. Considerada como una teoría cuántica de campo, se basa en objetos unidimensionales llamados cuerdas, que vibran y se comportan de manera particular. En sus inicios, esta teoría ofrecía cierto entendimiento de algunas características de la interacción fuerte. Sin embargo, aproximadamente una década después de su aparición, fue descartada debido al surgimiento y éxito de una teoría alternativa: la Cromodinámica Cuántica (QCD). La QCD se convirtió en el marco teórico predominante para describir la interacción nuclear fuerte y proporcionó una comprensión más completa y precisa de este fenómeno fundamental en el ámbito de la física de partículas.

La Teoría de Cuerdas tiene como objetivo fundamental unificar todas las fuerzas fundamentales del universo mediante el concepto de cuerdas vibrantes unidimensionales. En contraste con la concepción tradicional de partículas como puntos sin tamaño, en esta teoría, cada partícula elemental está representada por una pequeña cuerda que puede oscilar y vibrar de diversas maneras. Estas vibraciones dan origen a estados de partículas con propiedades únicas, como masas y espines distintos. Los distintos modos de vibración de las cuerdas están determinados por su tensión y las condiciones específicas en sus extremos.

Entre los modos de vibración se encuentra un estado sin masa que representa al gravitón, la partícula mediadora de la gravedad. Esto nos indica que esta teoría incorpora la gravedad de forma natural, a diferencia de las teorías cuánticas de campos tradicionales. Aunque aún no ha sido confirmada experimentalmente, sigue siendo objeto de investigación para lograr una teoría unificada. En una teoría convencional de campos cuánticos, las partículas fundamentales son consideradas puntos, en su aproximación perturbativa la teoría de cuerdas considera objetos de una dimensión, que tienen una longitud característica l_p . Dado que se trata de una teoría cuántica de gravedad tendría que incluir ciertas constantes fundamentales c (velocidad de la luz), \hbar (Constante de Planck dividida sobre 2π), G (Constante de gravitación de Newton). Haciendo un análisis dimensional la longitud de Planck

$$l_p = \left(\frac{\hbar G}{c^3} \right)^{1/2} = 1.6 \times 10^{-33} \text{ cm.}$$

De manera similar, la masa de Planck

$$m_p = \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2} = 1.2 \times 10^{10} \text{ GeV}/c^2.$$

En el primer desarrollo de la teoría de cuerdas, que describe la propagación de cuerdas en el espacio-tiempo, se obtuvo una dimensión crítica igual a 26. Sin embargo, este enfoque inicial, conocido como cuerda bosónica, presentó un espectro de estados sin masa que incluía una partícula con masa imaginaria llamada taquión. Esta teoría no incluía fermiones. No obstante, el avance continuó con el desarrollo de la cuerda fermiónica, donde se incorporaron campos espinoriales, permitiendo la existencia de fermiones y evitando los taquiones mediante ciertas proyecciones. Esta inclusión de fermiones en la teoría de cuerdas fue un paso crucial hacia una descripción más completa y realista de las partículas fundamentales y sus interacciones en el universo. En la actualidad, hay 5 teorías de supercuerdas relacionadas por dualidades, demostrado formalmente por Witten en 1995 [8]. Estas teorías en 10 dimensiones se unifican bajo una teoría más amplia llamada Teoría-M en 11 dimensiones.

La formulación de la teoría de cuerdas requiere de ciertos ingredientes esenciales para asegurar su completitud y consistencia. En el modelo estándar de partículas, la materia ordinaria se compone de fermiones, mientras que las interacciones fundamentales se dan a través de bosones. La supersimetría es un elemento clave en la teoría de cuerdas, proponiendo una simetría hipotética que relaciona bosones con fermiones y viceversa mediante sus super compañeros. Hasta la fecha, los experimentos diseñados para verificar la supersimetría no han encontrado evidencia de su existencia. Esto se atribuye a que las partículas super compañeras, postuladas por la supersimetría, tienen masas considerablemente altas, lo que las hace prácticamente indetectables en los colisionadores de partículas actuales, que operan en escalas de energía alrededor de 13 TeV.

El segundo ingrediente, son las ya mencionadas dimensiones extra. Para el caso de supercuerdas son necesarias 10 dimensiones. Esto fue propuesto por primera vez por Kaluza (1921) y Klein (1926), logrando con sus ideas unificar la Teoría Electromagnética y la Teoría de Relatividad considerando un espacio-tiempo de 5 dimensiones, donde esta dimensión extra está enrollada en un círculo. A esto se le conoce como compactificación.



Figura 1: Idea de compactificación, desde muy lejos el cilindro se observa cómo unidimensional, pero de cerca este es dos dimensional [5].

Geometría compleja y variedades de Calabi-Yau

En orden de revisar aspectos de la geometría compleja que son relevantes para compactificaciones de flujos en la teoría de cuerdas tipo IIB, daremos una descripción de la naturaleza geométrica y topológica sobre la construcción de variedades o espacios de Calabi-Yau, espacios donde se encuentran las 6 dimensiones extra de la teoría de supercuerdas.

La noción principal que compete a una generalización de las curvas y superficies en el espacio es la de una variedad. Esta generalización de superficies es construida bajo la idea de que localmente, cercano a un punto de la variedad, ésta parece corresponder a un espacio plano de dimensión n , tal y como será en el caso real n -dimensional. Para establecer esta correspondencia de manera precisa, considerando al espacio en primera instancia como un espacio topológico X , establecemos que éste pueda ser cubierto por conjuntos abiertos tal que para cada uno de estos podamos definir un mapeo uno a uno φ_i , hacia \mathbf{R}^n . Este par de abiertos y mapeos constituyen las cartas de X , y cada mapeo nos da un sistema local de coordenadas para puntos en el abierto correspondiente.

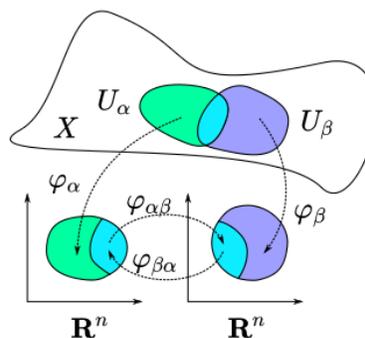


Figura 2: Una variedad posee funciones de transición que permiten pasar de un sistema de coordenadas local a otro.

El considerar que la unión de estos conjuntos constituyen a toda X , y que dada la intersección no vacía de dos abiertos se pueda definir un mapeo de composición que mapee un conjunto abierto de \mathbf{R}^n a otro conjunto abierto de \mathbf{R}^n , $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ (véase Figura 2), es lo que constituye la definición de variedad topológica, y esta será compacta si cualquier colección de abiertos en la topología de X que sean cubierta abierta tiene una subcubierta finita, es decir que si α actúa en infinitos conjuntos abiertos U_α , la condición de compactidad requiere que exista una subcolección finita de conjuntos $\{V_k\} \subset \{U_\alpha\}$ de forma que $\{V_k\}$ sea cubierta abierta de X , y ahora k actúa en finitos conjuntos abiertos V_k .

Adicionalmente, así como una variedad topológica dota de la estructura necesaria para definir una noción de continuidad, una variedad diferenciable traerá consigo la noción de diferenciación, esto visto de la condición para que una variedad sea diferenciable: una variedad diferenciable es una variedad topológica con la restricción adicional de que las funciones de transición sean mapeos diferenciables en el sentido ordinario del cálculo multivariable.

La consideración final en nuestra primera discusión general sobre variedades cada vez más refinadas nos lleva a la segunda propiedad que definirá una variedad de Calabi-Yau, ahora hablamos sobre la noción de una variedad compleja. Así como una variedad diferenciable tiene suficiente estructura para definir la noción de funciones diferenciables, una variedad compleja es aquella que tiene suficiente estructura para definir la noción de funciones holomorfas, requiriendo ahora que las funciones de transición satisfagan las ecuaciones de Cauchy - Riemann.

Objetos propios de las variedades pueden ser definidos a fin de considerar nociones comunes en teorías de superficies. Tal es el caso de los espacios tangentes a la variedad, denotando su base en un punto $p \in X$, como

$$T_p X : \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$$

por lo que un elemento de este espacio puede ser escrito como $v = v^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Big|_p$ correspondiendo a un vector tangente en un punto de la variedad, conformando así un espacio vectorial.

En tanto que todo espacio vectorial tiene un espacio vectorial dual que consiste en mapeos lineales valuados en los reales, la base del espacio vectorial dual asociado al espacio tangente en un punto corresponde a

$$T_p^* X : \{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$$

donde por definición $dx^i: T_p X \rightarrow R^1$ llamada 1-forma, es un mapeo lineal con la característica de que $dx^i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \delta^i_j$. Si la variedad X es una variedad compleja de dimensión $d = \frac{n}{2}$ entonces podemos considerar la noción de espacios tangentes complexificados de la variedad $T_p X^C = T_p X \otimes C$, donde ahora permite coeficientes complejos sobre el espacio vectorial. Para reflejar la estructura compleja del espacio considerado podemos escribir la base de nuestro espacio tangente como

y por analogía para variedades re: $T_p X^C : \left\{ \frac{\partial}{\partial z^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial z^d} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^d} \Big|_p \right\} . T_p^* X \otimes C$

$$T_p^* X^C : \{dz^1|_p, \dots, dz^d|_p, d\bar{z}^1|_p, \dots, d\bar{z}^d|_p\}$$

Dentro del tratamiento de variedades complejas (entre ellas variedades de Calabi-Yau) es conveniente redefinir las expresiones de los espacios tangente y cotangente o dual complexificados de la siguiente forma,

$$T_p X^C = T_p X^{(1,0)} \oplus T_p X^{(0,1)} , \quad T_p^* X^C = T_p^* X^{(1,0)} \oplus T_p^* X^{(0,1)}$$

donde de ambas definiciones, la primera parte (1,0) corresponde a espacios tangente y cotangente holomorfos, esto es por estar asociados a la coordenada compleja z , y la segunda (0,1) suele llamarse anti-holomorfos por estar asociados a la coordenada compleja conjugada \bar{z} . Ambos espacios son de dimensión d .

Grupos de Cohomología de de Rham y Dolbeault

Puesto que ahora se ha considerado por el momento espacios duales o cotangentes de dimensión arbitraria, existe una operación para sus elementos que mapea digamos una q -forma, a una $q + 1$ forma en la variedad X . Esto es, el mapeo de derivada exterior

$$d : \bigwedge^q T^* X \rightarrow \bigwedge^{q+1} T^* X$$

donde explícitamente actúa sobre una q -forma

$$d : \omega \rightarrow d\omega = \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_q}}{\partial x^{i_{q+1}}} dx^{i_{q+1}} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}$$

Ahora si se piensa en X como una variedad compleja, es posible definir sus formas de orden (r, s) , o vistas como reales $(r + s)$,

$$\omega^{r,s} = \omega_{i_1 \dots i_r \bar{j}_1 \dots \bar{j}_s} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_r} \wedge d\bar{z}^{\bar{j}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\bar{j}_s}$$

y se obtiene su derivada exterior de la forma

$$d\omega^{r,s} = \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_r \bar{j}_1 \dots \bar{j}_s}}{\partial z^{i_{r+1}}} dz^{i_{r+1}} \wedge dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_r} \wedge d\bar{z}^{\bar{j}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\bar{j}_s} \\ + \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_r \bar{j}_1 \dots \bar{j}_s}}{\partial \bar{z}^{\bar{j}_{s+1}}} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_r} \wedge d\bar{z}^{\bar{j}_{s+1}} \wedge d\bar{z}^{\bar{j}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\bar{j}_s} .$$

pudiendo ser resumida a una expresión más simple, $d\omega^{r,s} = \partial\omega^{r,s} + \bar{\partial}\omega^{r,s}$, descomponiendo así el operador de derivada exterior $d = \partial + \bar{\partial}$ en parte holomorfa y anti holomorfa respectivamente. Es importante notar que, debido a la antisimetría envuelta en la derivada exterior, se tiene que $d^2 = 0$.

Una q -forma tal que $d\omega^{\blacksquare} = 0$, se llamará forma cerrada, adquiriendo una peculiaridad bastante considerable. Una manera de que esto suceda es que ω pueda ser escrita como $d\beta$ con β una $(q - 1)$ forma, que en dado caso se llamará forma exacta, esto es, $\omega = d\beta$, por lo que $d\omega^{\blacksquare} = d^2\beta = 0$.

Sin embargo, aquellas ω^{\blacksquare} que sean cerradas pero no exactas proveen soluciones no triviales a la ecuación $d\omega^{\blacksquare} = 0$, y motiva la definición del q -ésimo grupo de Cohomología de de Rham $H^q_d(X)$ para una variedad X real y ω, α, q -formas

$$H^q_d(X, \mathbb{R}) = \frac{\{\omega | d\omega = 0\}}{\{\alpha | \alpha = d\beta\}}$$

Análogamente, para variedades complejas la Cohomología de Dolbeault en vez de usar el operador d , usa $\bar{\partial}$ y mientras que $\bar{\partial}^2 = 0$, se forma el (r, s) -ésimo grupo de Cohomología de Dolbeault, también válido para $\bar{\partial}$

$$H^{\bar{\partial}}_{r,s}(X, \mathbb{C}) = \frac{\{\omega^{r,s} | \bar{\partial}\omega^{r,s} = 0\}}{\{\alpha^{r,s} | \alpha^{r,s} = \bar{\partial}\beta^{r,s-1}\}}$$

Métricas Hermíticas y variedades de Kähler

Una variedad diferenciable puede admitir un mapeo simétrico positivo g llamado métrica

$$g : T_p X \times T_p X \rightarrow \mathbb{R}$$

que puede ser visto en coordenadas locales como $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, y por definición de simetría $g_{ij} = g_{ji}$. Como ya hemos visto con anterioridad, es posible extender por analogía el mapeo g para variedades complejas

$$g : T_p X^{\mathbb{C}} \times T_p X^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$$

donde reescribimos los componentes de la métrica original g_{ij} en términos de coordenadas holomorfas y anti holomorfas $g_{ij} = g_{ij}(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j})$ y $g_{i\bar{j}} = (\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\bar{j}}})$, y para los cuales, por la imposición de la simetría de la métrica original, en general se cumple que $g_{ij} = g_{ji}$, $g_{i\bar{j}} = g_{\bar{j}i}$, con $\underline{g}_{ij} = g_{ij}$, $\underline{g}_{i\bar{j}} = g_{i\bar{j}}$.

Si resulta que para una métrica dada en coordenadas locales, se cumpla que $g_{ij} = g_{i\bar{j}} = 0$, ésta métrica se llamará métrica Hermítica donde se escribe entonces sólo para componentes holomorfas y anti holomorfas mezcladas

$$g = g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^{\bar{j}} + g_{\bar{i}j} d\bar{z}^{\bar{i}} \otimes dz^j$$

Dada una métrica Hermítica en X , es posible construir una forma (1,1) de la siguiente manera

$$J = ig_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^{\bar{j}} - ig_{\bar{i}j} d\bar{z}^{\bar{i}} \otimes dz^j = ig_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^{\bar{j}}$$

Si $dJ = 0$, es decir, si J es cerrada, se le llama forma de Kähler, y a X , se le llama variedad de Kähler. Desarrollando la condición anterior

$$dJ = (\partial + \bar{\partial})ig_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^{\bar{j}} = 0$$

implica que

$$\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^l} = \frac{\partial g_{l\bar{j}}}{\partial z^i}$$

y podemos reescribir $g_{i\bar{j}}$ localmente como

$$g_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 K}{\partial z^i \partial \bar{z}^{\bar{j}}}$$

esto es que $J = i\partial\bar{\partial}K$, donde es conocido como el potencial de Kähler y es definida localmente como una función en el parche de coordenadas locales. Dado que estamos considerando una variedad que admite una métrica, el tensor de curvatura de Riemann y el tensor de Ricci en coordenadas complejas se simplifican debido a las igualdades anteriores

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = g_{i\bar{s}} \frac{\partial \Gamma_{\bar{j}l}^{\bar{s}}}{\partial z^k}, \quad R_{\bar{i}j} = R_{\bar{i}k}^k = -\frac{\partial \Gamma_{\bar{i}k}^k}{\partial z^j}$$

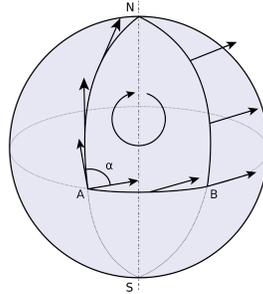


Figura 3: Un vector transportado paralelamente sobre una trayectoria cerrada en una superficie curva no vuelve a su orientación original, como usamos conexión de Levi-Civita su longitud no cambia.

Grupos de Holonomía

La relación entre dos vectores v y v' , donde este último fue transportado paralelamente sobre una trayectoria cerrada en la variedad (véase Figura 3) corresponde a una transformación del grupo $SO(n)$. Si consideramos ahora este mismo procedimiento en todos los puntos de la variedad, un razonamiento similar nos dirá que esta colección de transformaciones formará también un grupo. De aquí que el grupo que describe cómo los vectores cambian bajo transporte paralelo sobre trayectorias cerradas en la variedad es llamado grupo de Holonomía de la variedad. Claramente si la variedad es plana, el grupo de Holonomía asociado contendrá sólo una transformación de identidad.

Si la variedad X es una variedad compleja de Kähler, sabemos que las componente no nulas de la conexión de Levi-Civita serán las que tengan índices del mismo tipo

$$\Gamma_{jk}^l = g^{l\bar{s}} \frac{\partial g_{k\bar{s}}}{\partial z^j} \quad \Gamma_{\bar{j}\bar{k}}^{\bar{l}} = g^{\bar{l}s} \frac{\partial g_{\bar{k}s}}{\partial \bar{z}^{\bar{j}}}$$

entonces si descomponemos un vector en coordenadas complejas, $v = v^j \frac{\partial}{\partial z^j} + v^{\bar{j}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\bar{j}}}$, notamos que las componentes holomorfas y anti holomorfas del vector nunca se mezclan. por lo que la descomposición en un punto p de $T_p X^C = T^{(1,0)}_p X \otimes T^{(0,1)}_p X$ no es afectado por el transporte paralelo.

Esto quiere decir que las transformaciones de holonomía pueden ser asociadas en términos de su acción para las bases holomorfas y anti holomorfas, que caería en el subgrupo de $SO(n)$, $U(d)$ para $d=n/2$. En efecto existen casos de variedades de Kähler con grupo de Holonomía $SU(d)$ (Calabi-Yau) y naturalmente si tenemos holonomía $SU(d)$, entonces las partes $U(1)$ de las conexiones se anulan.

Finalmente se revisarán conceptos extra que son clave de la Cohomología para llevar a cabo la descripción de las variedades de Calabi-Yau y sus espacios moduli.

Así como existe la operación de derivada exterior d que lleva p -formas a $(p + 1)$ -formas, se puede definir un operador adjunto d^\dagger que ahora mapea p -formas a $(p - 1)$ -formas

$$d^\dagger : \omega \rightarrow d^\dagger \omega = -\frac{1}{(p-1)!} \omega^{\mu_1 \dots \mu_{p-1}; \mu} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p-1}}$$

A su vez podemos establecer otro operador, el operador de Hodge \star , que para p -formas en una variedad de dimensión n y con métrica g , a una $(n - p)$ -forma, de la siguiente manera

$$\omega \rightarrow \star \omega = \frac{1}{(n-p)! p!} \epsilon_{i_1, \dots, i_n} \sqrt{|\det g|} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} \omega_{j_1 \dots j_p} dx^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$$

de esta manera resulta que el operador adjunto puede ser escrito como $d^\dagger = (-1)^{np+n+1} \star d \star$

La utilidad principal del operador d en la construcción de variedades que estamos considerando cae en cuenta con el teorema de descomposición de Hodge, el cual dice que para una p -forma en una variedad, ésta puede ser escrita de forma única como $\omega = d\beta + d^\dagger \gamma + \omega'$, donde el último término se dice que es una p -forma armónica bajo el Laplaciano $\Delta = d^\dagger d + dd^\dagger$.

Particularmente si ésta forma es cerrada, en tanto que la forma γ se anula, se puede reescribir ω como, $\omega = d\beta + \omega'$, y reconocemos a $\omega - d\beta$ como un elemento del p -ésimo grupo de Cohomología $H^p(X, R)$, y que hay una p -forma armónica única representativa de cada clase de Cohomología.

Nuevamente por analogía podemos considerar a X , compleja y ver que para (r, s) -formas, la descomposición de Hodge se ve como

$$\omega^{r,s} = \bar{\partial} \alpha^{r,s-1} + \bar{\partial}^\dagger \beta^{r,s+1} + \omega'^{r,s}$$

donde ahora la forma armónica es así bajo el Laplaciano $\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}^\dagger \bar{\partial} + \bar{\partial} \bar{\partial}^\dagger$. Y ahora si la forma es cerrada bajo $\bar{\partial}$, entonces esta descomposición tiene una única forma armónica representativa de cada clase de $H^{r,s}_{\bar{\partial}}(X, C)$. Si X es variedad de Kähler, $\Delta = 2\Delta_{\bar{\partial}} = 2\Delta_{\partial}$. Por último definimos a $h^{r,s}_X$ como la dimensión compleja de compleja de $H^{r,s}_{\bar{\partial}}(X, C)$, y mediante el operador de Hodge, nos damos cuenta que $h^{r,s}_X = h^{n-r, n-s}_X$. Bajo la conjugación compleja y las condiciones para variedades Kähler vemos que, $h^{r,s}_X = h^{s,r}_X$.

Variedad de Calabi-Yau

En tanto que al teoría de cuerdas debe ser consistente, la restricción a 10 dimensiones espaciales lleva a considerar compactificar las 6 dimensiones restantes en una variedad de forma que

$$M^{1,9} = M^{1,3} \times M^6$$

con M^6 conocida como variedad interna y las variedades de Calabi-Yau son las más interesantes para realizarlo. Una pregunta que puede surgir es: ¿Por qué realizar la compactificación en variedades Calabi-Yau? El objetivo es encontrar un espinor covariantemente constante en la variedad interna sobre la cual compactificamos. Este requerimiento tiene importantes implicaciones matemáticas, ya que fuerza al grupo de holonomía de la variedad interna a ser $SU(3)$. En pocas palabras, esto nos lleva a trabajar con variedades 3-fold Calabi-Yau, ya que son las que cumplen con esta condición de holonomía [4].

Una variedad de Calabi-Yau es una variedad compacta, compleja, Kähler cuyo grupo de holonomía es $SU(n)$.

Compactificaciones en teoría de cuerdas

En esta sección se resumen las compactificaciones de flujos de la teoría de cuerdas tipo IIB en variedades CY a cuatro dimensiones. Describimos la acción efectiva en 4 dimensiones, así como el potencial escalar efectivo.

Kaluza y Klein formularon cuestionamientos fundamentales al proponer una teoría unificada de cinco dimensiones, donde la quinta dimensión se compactificaba enrollándose en un círculo. La elección del tamaño y geometría de este círculo compacto era crucial para que la quinta dimensión no fuera apreciable a escalas observables en nuestro universo de cuatro dimensiones. De manera similar, en la teoría de cuerdas, surgen interrogantes al compactificar dimensiones adicionales en lo que se conoce como el "problema del espacio módulo". Aquí, el tamaño y forma de la variedad interna son determinados por los valores de expectación de vacío en campos escalares, llamados módulos. Estos módulos describen cómo se deforman y compactifican las dimensiones adicionales en la teoría de cuerdas, y recientemente se han estudiado en la compactificación de flujos para obtener diversas soluciones de vacío con distintas propiedades físicas.

La búsqueda de una de estas soluciones se enfoca en una teoría de cuatro dimensiones con espacio-tiempo de Minkowski y una variedad compacta que describa consistentemente la física de partículas. Para lograr una teoría fenomenológicamente identificable, capaz de hacer predicciones comparables con las observaciones experimentales, es necesario desarrollar meticulosamente la teoría de cuerdas tipo IIB hacia una teoría efectiva en cuatro dimensiones con supersimetría $N = 1$. Este proceso implica reducir las dimensiones adicionales y entender cómo las cuerdas y las vibraciones en las dimensiones compactas se traducen en partículas y campos en nuestro espacio-tiempo observable.

La preservación de la supersimetría a bajas energías es esencial para resolver problemas de jerarquía y obtener una descripción realista del universo en el que vivimos, lo cual involucra cálculos matemáticos detallados y técnicas avanzadas. En la compactificación de teorías de cuerdas tipo II en variedades 3-fold Calabi-Yau, se conserva parte de la supersimetría inicial, pero surge una dificultad debido a los módulos, cuyos valores de expectación son indeterminados, lo cual es problemático desde un punto de vista fenomenológico, ya que están relacionados con cantidades físicas como las constantes de acoplamiento. Esta problemática es conocida como el "problema del espacio de módulos", y su resolución requiere un procedimiento para dar masa a estos campos, conocido como estabilización de módulos. Este proceso es crucial para obtener una teoría efectiva en nuestro espacio-tiempo observable y lograr una descripción realista del universo dentro del marco de la teoría de cuerdas.

Es necesaria la estabilización de los módulos, esto surge como solución al considerar flujos no triviales, los cuales generan un potencial en una teoría efectiva 4-dimensional que permite estabilizar los módulos. La compactificación de la teoría de cuerdas tipo IIB en un variedad Calabi-Yau permite construir una teoría efectiva de baja energía con una supersimetría $N = 1$, donde la acción es

$$S_4 = \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{M_{Pl}^2}{2} \mathcal{R}^{(4)} - M_{Pl}^2 K_{a\bar{b}} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \bar{\phi}^{\bar{b}} + V(\phi^l) \right]$$

Con el fin de explorar vacíos en la teoría se introducen expresiones de la geometría del espacio de los módulos de la variedad CY, usualmente conocida como geometría especial.

En tanto que la métrica del espacio moduli es de tipo Kähler, esta tendrá un potencial de Kähler de la forma

$$K = -\ln[-i(\tau - \bar{\tau})] - \ln \left[i \int_{CY} \Omega \wedge \bar{\Omega} \right] - 2 \ln [\mathcal{V}(T_m)].$$

donde Ω representa la $(3,0)$ -forma holomorfa de la variedad, y codifica los módulos de estructura compleja, a su vez, V es el volumen adimensional dependiente de los módulos de Kähler. Se escoge una base canónica integral $\{\alpha_I, \beta^I\}$ del grupo de cohomología $H^3(CY, \mathbb{Z})$ y su base dual $\{A^I, B_I\}$ del grupo de homología $H_3(CY, \mathbb{Z})$ definida de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\int_{CY} \alpha_I \wedge \beta^J &= \delta_J^I = - \int_{CY} \beta^J \wedge \alpha_I, \\ \int_{CY} \alpha_I \wedge \alpha_J &= \int_{CY} \beta^I \wedge \beta^J = 0, \\ \int_{A^J} \alpha_I &= - \int_{B_I} \beta^I = \delta_J^I,\end{aligned}$$

con los índices I, J de 0 a $h^{2,1}$. Esta base conocida como la base simpléctica que nos permite expresar los periodos Π definidos en el CY

$$\Pi = \begin{pmatrix} \int_{A^I} \Omega \\ \int_{B_I} \Omega \end{pmatrix}$$

Una vez realizado el desarrollo matemático, en la base simpléctica podemos definir el potencial de Kähler de la siguiente forma:

$$K_{CS} = - \ln(-i \bar{\Pi}^T \Sigma \Pi)$$

con Σ definida como la matriz simpléctica. con $k = 1 + h^{2,1}$. $\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_{k,k} \\ -\mathbb{I}_{k,k} & 0 \end{pmatrix}$

Ya hecha la compactificación el potencial escalar que se genera, expresada en función del potencial de Kähler

$$V = \frac{1}{2\kappa_{10}^2 g_s} e^K \left[K^{a\bar{b}} D_a W \bar{D}_{\bar{b}} \bar{W} - |W|^2 \right]$$

dónde la métrica de Kähler viene dada por

$$K_{a\bar{b}} = \partial_a \partial_{\bar{b}} K.$$

y $K^{a\bar{b}}$ es la inversa de la métrica de Kähler. Definiendo la derivada covariante supersimétrica de W

$$D_a W = \partial_a W + \partial_a K W.$$

El superpotencial W generado por los flujos, Gukov-Vafa-Witten (GVW), viene dado por:

$$W = \int_{CY} G_{(3)} \wedge \Omega.$$

Definido en la base simpléctica de la siguiente forma.

$$W = G \Sigma \Pi.$$

Una vez que todos los elementos están definidos, podemos proceder a extremar el potencial para encontrar los vacíos, que corresponden a los puntos críticos de dicho potencial. Para facilitar este análisis, realizamos un cambio de base que nos permite expresar el potencial en la base simpléctica, simplificando así los cálculos

y facilitando la búsqueda de soluciones estables y físicamente significativas. El potencial en esta base toma la siguiente forma

con

$$V = e^K \left[\frac{(\tilde{\Pi}^T \Sigma \Pi)^2}{\partial_z \tilde{\Pi}^T \Sigma \tilde{\Pi} \Sigma \tilde{\Pi}} \left| G \Sigma \partial_z \Pi - \frac{\tilde{\Pi}^T \Sigma \partial_z \Pi}{\tilde{\Pi}^T \Sigma \Pi} G \Sigma \Pi \right|^2 - (\tau - \bar{\tau})^2 \left| -H \Sigma \Pi - \frac{W}{\tau - \bar{\tau}} \right|^2 \right],$$

$$\tilde{\Pi} = \partial_z \Pi \otimes \Pi - \Pi \otimes \partial_z \Pi,$$

y

$$\tau - \bar{\tau} = -\frac{(F - \tau H) \Sigma \Pi}{H \Sigma \Pi}.$$

Los vacíos que nos interesan son dS (de Sitter), se buscan solo tomando las derivadas respecto a lo módulos presentes y sus complejos conjugados, igualados a cero

$$\partial_j V = \partial_{\bar{j}} V = 0, \quad j = \tau, 1, \dots, h^{1,1}.$$

Exploración de vacíos

En esta sección se describe la exploración de extremos del potencial escalar para una compactificación de la teoría de cuerdas IIB en una variedad CY con un módulo de estructura compleja. La variedad analizada fué la variedad espejo de Calabi-Yau $X(2,2,2,2)$ en el espacio proyectivo P^7 , sobre su punto LCS. Se resolvieron los periodos usando el método de Frobenius. La ecuación de Pichard-Fuchs que se analizó fue la siguiente

$$\theta^4 - 2^4 z (2\theta + 1)^4 = 0$$

Tomando un Ansatz en serie de potencias según el método de Frobenius, las soluciones a la ecuación indicial son $0, 0, 0, 0$, lo que indica la construcción de las demás soluciones de la forma

$$\Pi_0(z) = \begin{pmatrix} f_0(z) \\ f_0(z) \log(z) + f_1(z) \\ \frac{1}{2} f_0(z) \log^2(z) + f_1(z) \log(z) + f_2(z) \\ \frac{1}{6} f_0(z) \log^3(z) + \frac{1}{2} f_1(z) \log^2(z) + f_2(z) \log(z) + f_3(z) \end{pmatrix}$$

A orden 2 se obtuvieron las expresiones para los periodos

$$\pi_1 = 1 + 16z + 1296z^2 + O(z^3)$$

$$\pi_2 = 64z + 6048z^2 + O(z^3)$$

$$\pi_3 = 64z + 11664z^2 + O(z^3)$$

$$\pi_4 = -384z - 25776z^2 + O(z^3)$$

Ya calculados los periodos, se usó la matriz de transición dada en [2], para realizar el respectivo cambio de base a la simpléctica.

$$\Pi = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ X^0 \\ X^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa L_3 + \frac{c_2 \cdot D}{12} L_1 \\ -\kappa L_2 + \sigma L_1 \\ L_0 \\ L_1 \end{pmatrix} = (2\pi i)^3 \begin{pmatrix} \frac{\zeta(3)\chi(M)}{(2\pi i)^3} & \frac{c_2 \cdot D}{24 \cdot 2\pi i} & 0 & \frac{\kappa}{(2\pi i)^3} \\ \frac{c_2 \cdot D}{24} & \frac{\sigma}{2\pi i} & -\frac{\kappa}{(2\pi i)^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\pi i} & 0 & 0 \end{pmatrix} \Pi_0.$$

Tomando los valores correspondientes de los componentes de la matriz de la Tabla 1.

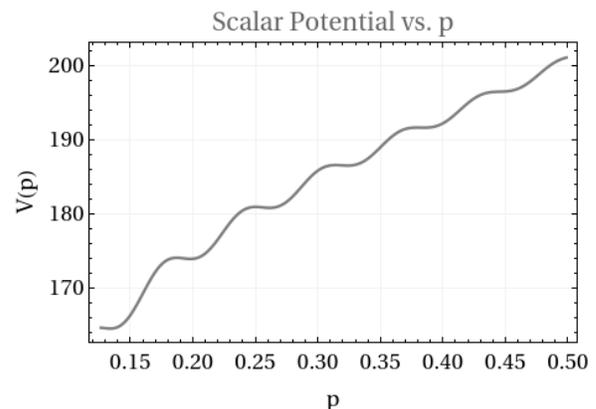
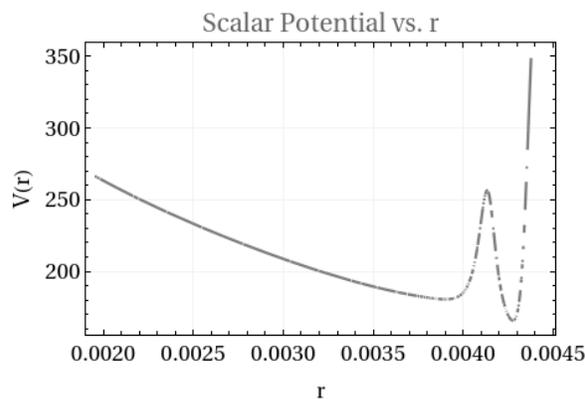
Tabla 1. Cantidades topológicas importantes para la variedad [2].

| N | a_1, a_2, a_3, a_4 | $1/\mu$ | Mirror M | κ | $c_2 \cdot D$ | $\chi(M)$ |
|-----|---|--------------|-------------------------|----------|---------------|-----------|
| 8 | $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ | 2^8 | $X_{2,2,2,2}(1^8)$ | 16 | 64 | -128 |
| 9 | $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ | $2^6 3^3$ | $X_{4,3}(1^5 2^1)$ | 6 | 48 | -156 |
| 16 | $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ | 2^{10} | $X_{4,2}(1^6)$ | 8 | 56 | -176 |
| 25 | $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ | 5^5 | $X_5(1^5)$ | 5 | 50 | -200 |
| 27 | $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ | 3^6 | $X_{3,3}(1^6)$ | 9 | 54 | -144 |
| 32 | $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}$ | 2^{12} | $X_{4,4}(1^4 2^2)$ | 4 | 40 | -144 |
| 36 | $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ | $2^4 3^3$ | $X_{3,2,2}(1^7)$ | 12 | 60 | -144 |
| 72 | $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$ | $2^8 3^3$ | $X_{6,2}(1^5 3^1)$ | 4 | 52 | -256 |
| 108 | $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$ | $2^4 3^6$ | $X_6(1^4 2^1)$ | 3 | 42 | -204 |
| 128 | $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$ | 2^{16} | $X_8(1^4 4^1)$ | 2 | 44 | -296 |
| 144 | $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$ | $2^{10} 3^3$ | $X_{6,4}(1^3 2^2 3^1)$ | 2 | 32 | -156 |
| 200 | $\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}$ | $2^8 5^5$ | $X_{10}(1^3 2^1 5^1)$ | 1 | 34 | -288 |
| 216 | $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}$ | $2^8 3^6$ | $X_{6,6}(1^2 2^2 3^2)$ | 1 | 22 | -120 |
| 864 | $\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}$ | $2^{12} 3^6$ | $X_{12,2}(1^4 4^1 6^1)$ | 1 | 46 | -484 |

Una vez que hemos definido el potencial y realizado el cambio de base a la base simpléctica, procedemos a encontrar los puntos críticos del potencial. Para ello, tomamos las derivadas del potencial con respecto a los módulos presentes y sus complejos conjugados, y luego igualamos estas derivadas a cero. Este proceso nos permitirá identificar los valores de los módulos que dan lugar a soluciones estables y de mínima energía en la teoría.

A continuación graficamos el potencial en términos de los módulos para el conjunto de flujos:

$$H_1 = H_2 = -4, H_3 = -2, H_4 = 3, F_1 = -1, F_2 = -6, F_3 = 8, \text{ y } F_4 = 6$$



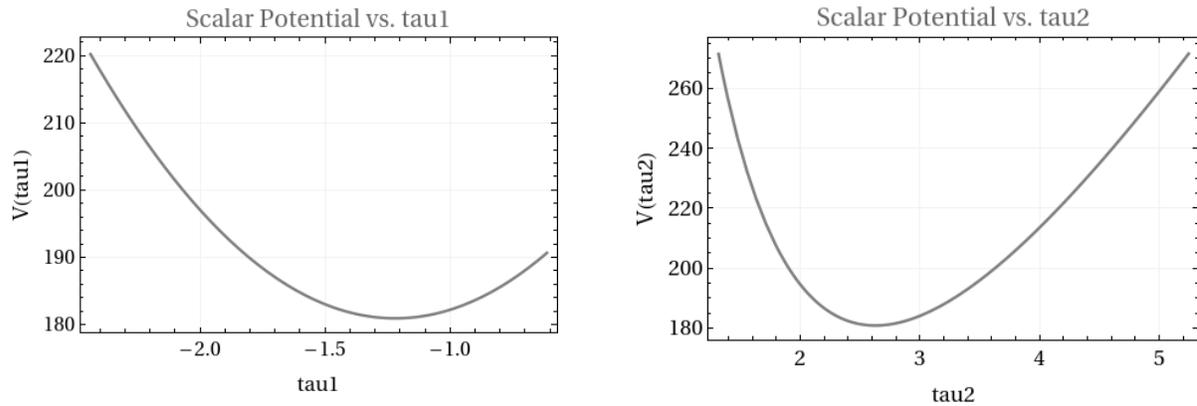
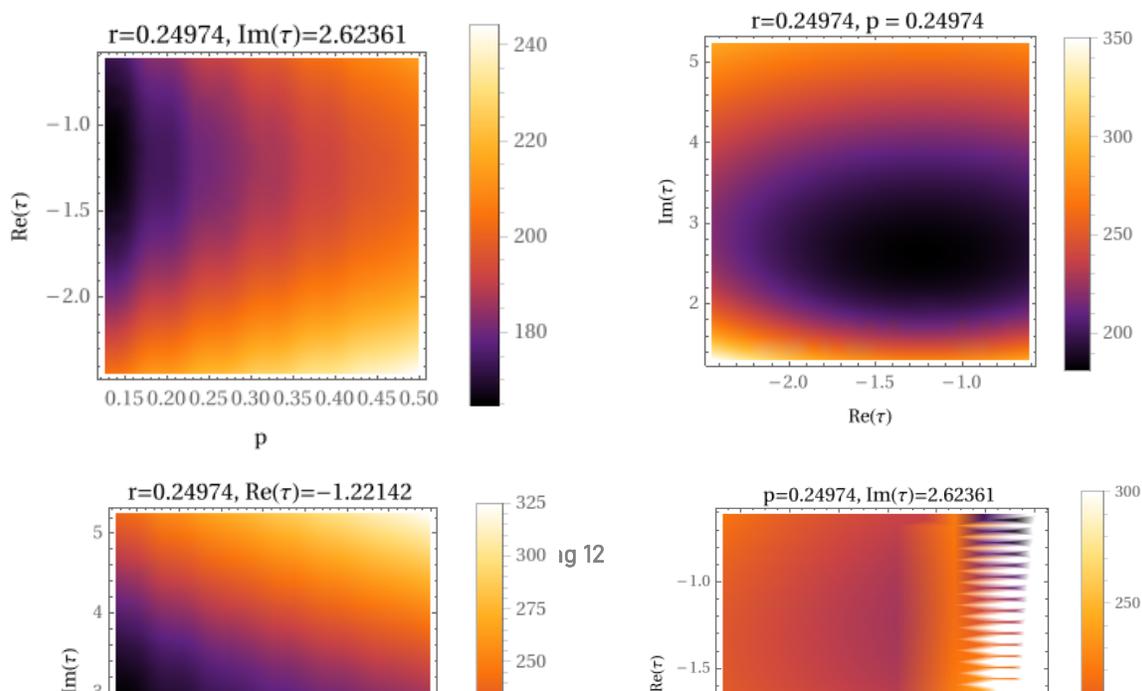


Figura 5

Encontramos un vacío de de Sitter, donde aparentemente hay cuatro direcciones estables. En los gráficos de la Figura 5 se muestra el potencial escalar donde cada uno de los campos se deja correr libremente, y los otros campos se evalúan en el valor del vacío. De esta forma puede verse el mínimo en cada dirección.

En la Figura 6 se muestran gráficos de densidad del potencial escalar en término de dos campos escalares reales. Se puede apreciar en las regiones de coloración morada regiones donde debe ubicarse el extremo de de Sitter encontrado, el cual es un mínimo con respecto a las direcciones de una variable representadas en la Figura 5. Es necesario estudiar en más detalle las segundas derivadas, para determinar su naturaleza.



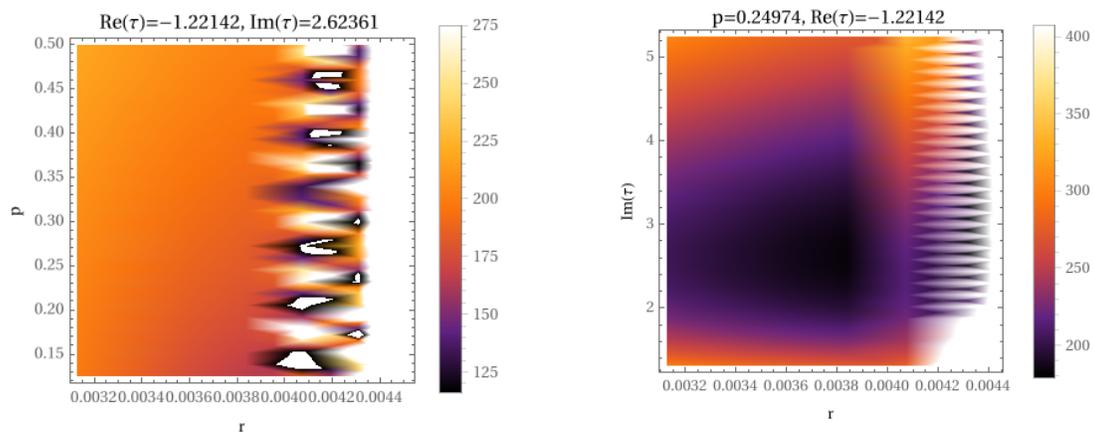


Figura 6: Estudio de densidad para el potencial en los seis planos posibles para los flujos considerados

Conclusiones

En este trabajo reportamos el aprendizaje y las investigaciones realizadas en teoría de cuerdas y geometría. Comenzamos describiendo el origen de la teoría de cuerdas, para posteriormente presentar elementos de geometría compleja y de las variedades Calabi-Yau. Posteriormente se resumen las Compactificaciones en Teoría de Cuerdas, y en la penúltima sección se presenta un análisis de los vacíos de la TC IIB en la geometría denotada $X(2,2,2)$ en el espacio proyectivo P^7 .

Esta variedad $X(2,2,2,2)$ posee un parámetro de estructura compleja. Se obtuvieron soluciones de las ecuaciones de Piccard-Fuch para los períodos de la geometría cerca del punto crítico de LCS (large complex structure) en cierta base, y se realizó la conversión a la base simpléctica encontrada en [2]. Se estudió la convergencia de las soluciones incrementando el tamaño de la serie, comenzando por 10 términos y subiendo de 10 en 10 hasta 100.

Posteriormente, se consideró el potencial escalar para el módulo de estructura compleja y el axión-dilatón, empleando flujos de tipo R-R y NS-NS. Se exploraron del orden de 50 configuraciones de flujos y para cada una de ellas buscamos extremos del potencial. De todas las exploraciones se encontró un extremo de de

Sitter que es el que se reporta en la sección de resultados. El vacío de de Sitter encontrado está cerca del límite de convergencia de la serie de los períodos, sin embargo se consideraron términos hasta orden 100, por lo que estimamos que se puede confiar en la exactitud del cálculo. En este trabajo se dieron los pasos para un análisis profundo. Como continuación habría que explorar cientos de configuraciones de flujos. Adicionalmente para poder legitimar el extremo encontrado, será necesario estudiar el parche del conifold en el espacio módulo de la estructura compleja de la mencionada variedad.

Bibliografía/Referencias

1. Cabo Bizet, N. C., Loaiza-Brito, O., & Zavala, I. (2016). Mirror quintic vacua: hierarchies and inflation. *Journal of High Energy Physics*, 2016(10). doi:10.1007/jhep10(2016)082.
2. Bönisch, K., Klemm, A., Scheidegger, E., & Zagier, D. (2022). D-brane masses at special fibres of hypergeometric families of Calabi-Yau threefolds, modular forms, and periods. arXiv preprint arXiv:2203.09426.
3. Philip Candelas. "Lectures on complex manifolds".
4. Graña, M. (2006). Flux compactifications in string theory: A comprehensive review. *Physics Reports*, 423(3), 91-158. doi:10.1016/j.physrep.2005.10.008
5. Becker, K., Becker, M., & Schwarz, J. H. (2007). *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction*. Cambridge University Press.
6. Nakahara, M. (2003). *Geometry, Topology, and Physics* (2nd ed.). CRC Press.
7. Zwiebach, B. (2009). *A First Course in String Theory* (2nd ed.). Cambridge University Press.
8. Witten, E. (1995). String theory dynamics in various dimensions. *Nuclear Physics B*, 443(1-2), 85-126. doi:10.1016/0550-3213(95)00158-o