

IDENTIFICACIÓN DE ZONAS DE OPERACIÓN ESTABLES E INESTABLES DE SISTEMAS EN INGENIERÍA

Herrera Rincón, Juan Fernando (1), Gómez Martínez, Miguel Angel (2)

¹ [Ingeniería Mecatrónica, Universidad Santo Tomas Bucaramanga] | [juan.herrera@usttabuca.edu.co]

² [Departamento de Ingeniería Eléctrica Sede Salamanca, Division de Ingenierias, Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato] | [gomezma@gto.mx]

Resumen

Esta contribución está enfocada en el análisis de estabilidad de la operación dinámica de la posición de un motor y el pitch de una aeronave. El desarrollo de esta contribución integro el uso de las ecuaciones diferenciales y la aplicación del control, ya que el análisis se llevó a cabo en el dominio del tiempo mediante el cálculo de valores propios que se analizó en cada caso, y un estudio cuidadoso de la estabilidad de cada uno de estos, en busca de una conclusión para la comparación del contra entre un sistema lineal y un sistema no lineal, para que en contribuciones futuras hacer el respectivo análisis de bifurcación.

Abstract

This contribution is focus to the stability analisys of the dinamic operation of a motor's position and the pitch in an aircraft. The develop of this contribution integrate the use of differential equations and control theories, due to the analisys was developed in the time domain by calculating the characteristics values which were analyzed in every case such a carefull study of the stability, resulting that in a conclusion to the comparison of the differences between a linear and a no linear system, so that it will be possible to make a bifurcation analisys.

Palabras Clave-

Control lineal, Control no Lineal, Bifurcaciones, Posición Motor, Pitch de Aeronave, Espacio-estados, oscilación no lineal, Transitorio.

INTRODUCCIÓN

Análisis de Sistemas Dinámicos

En la actualidad las nuevas tecnologías proponen avance, creación y experimentación en las diferentes ramas del control, en este caso los sistemas dinámicos es un área fundamental del control, donde se da gran importancia a las matemáticas que remontan a Newton con sus estudios de Mecánica Celeste, y a Henri Poincaré, quien inicio el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales.

Se debe tener en cuenta que los sistemas que se presenten pueden modelarse mediante sistemas de ecuaciones ordinarias diferenciables (ODE por sus siglas en inglés) o diferenciables algebraicas (DAE por sus siglas en inglés), su análisis puede ser resuelto por alguno de estos dos métodos. Para este último método de estudiar el análisis del sistema es considerando el sistema desde un enfoque dinámico por medio del análisis del sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales que modelan el sistema. En este punto, la teoría de bifurcaciones presenta su importancia al analizar estos sistemas, ya que este método ayuda a pronosticar cualitativamente comportamientos dinámicos muy complejos en el sistema, debido a la variación de sus parámetros. [1]

Sistemas de Control Lineales

Para sistemas lineales, las ecuaciones que constituyen el modelo son lineales. La propiedad más importante de los sistemas lineales consiste en que se les puede aplicar el principio de superposición. Este principio establece que la respuesta producida por la aplicación simultánea de dos funciones de excitación diferentes o entradas, es la suma de dos respuestas individuales. En consecuencia, en los sistemas lineales la respuesta a varias entradas puede calcularse tratando una entrada cada vez y después sumando los resultados.

Como resultado del principio de superposición, las complicadas soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales se pueden obtener de la suma de soluciones simples. En una investigación experimental de un sistema dinámico, si la causa y el efecto son proporcionales, eso implica que el principio de superposición se mantiene y se concluye que el sistema se puede considerar lineal. [2]

Sistemas de Control No Lineales

Los sistemas no lineales, por supuesto, son aquellos que se representan mediante ecuaciones no lineales. Aunque las relaciones físicas con frecuencia se representan mediante ecuaciones lineales, en muchos casos las relaciones reales puede que no sean del todo lineales. De hecho, un estudio cuidadoso de los sistemas físicos revela que los llamados sistemas lineales son realmente lineales dentro del rango de operación limitado. Por ejemplo, muchos de los sistemas hidráulicos y neumáticos involucran relaciones no lineales entre sus variables. En los sistemas no lineales, la característica más importante es que el principio de superposición no es aplicable. En general, los procedimientos para encontrar la solución de problemas que involucran tales sistemas son extremadamente complicados. A causa de la dificultad matemática que representan los sistemas no lineales, con frecuencia es necesario linealizarlos alrededor de una condición de operación. Una vez que un sistema no lineal se aproxima mediante un modelo matemático lineal, se deben usar términos lineales para propósitos de análisis y diseño. [2]

Sistemas de Control Lineales Vs. No Lineales

Esta clasificación esta hecha de acuerdo con los métodos de análisis y diseño. Estrictamente hablando, los sistemas lineales no existen en la práctica, ya que todos los sistemas físicos son no lineales en algún grado. Los sistemas de control realimentados son modelos ideales fabricados para el analista para simplificar el análisis y diseño. Cuando las magnitudes de las señales en un sistema de control están limitadas en intervalos en los cuales los componentes del sistema exhiben una característica lineal (i.e., se aplica el principio de superposición), el sistema es esencialmente lineal. Pero cuando las magnitudes de las señales se extienden más allá del intervalo de porción lineal, dependiendo de la severidad de la no linealidad, el sistema

no se debe seguir considerando lineal. Por ejemplo, los amplificadores usados en los sistemas de control a menudo exhiben un efecto de saturación cuando la señal de entrada es muy grande; el campo magnético de un motor normalmente tiene propiedades de saturación. Otros efectos no lineales que se encuentran en sistemas de control son el juego entre dos engranes acoplados, la característica de resorte no lineal, la fuerza de fricción no lineal o entre dos miembros móviles, etc. Muy a menudo las características no lineales son introducidas en forma intencional en un sistema de control para mejorar su desempeño o proveer un control más efectivo. Por ejemplo, para alcanzar un control de tiempo mínimo, un tipo de controlador on-off se emplea en muchos misiles o sistemas de control de naves espaciales. Típicamente en estos sistemas, los motores de reacción están a los lados del vehículo para producir un par de reacción para control de altitud. Estos motores de reacción son controlados en una forma o totalmente prendidos o totalmente apagados, por lo que una cantidad fija de aire es aplicada desde un motor de reacción dado durante cierto tiempo para controlar la altitud del vehículo espacial. Los sistemas no lineales son difíciles de tratar en forma matemática, y no existen métodos generales disponibles para resolver una gran variedad de clases de sistemas no lineales. Debido a esto usaremos la teoría de bifurcaciones en sistemas dinámicos. [3]

Teoría de Bifurcaciones.

El estado transitorio y estable de un sistema representado por un conjunto de ecuaciones diferenciales puede resolverse mediante métodos convencionales de integración numérica, calculando las trayectorias y órbitas usando simulación digital. Sin embargo, es posible con la teoría de bifurcaciones predecir el comportamiento de las trayectorias y los bits sin recurrir a la solución de las ecuaciones diferenciales. En este caso, el análisis de bifurcaciones se aplicó para estudiar la aparición de cambios repentinos en una respuesta del sistema derivados de variaciones suaves y continuas en los parámetros del sistema. Los resultados obtenidos con este análisis pueden mostrarse en un diagrama de bifurcaciones. El diagrama de bifurcaciones proporciona información cualitativa sobre el comportamiento de las soluciones de estado estacionario (equilibrio) del sistema, ya que los parámetros físicos son variados. En ciertos puntos (puntos de bifurcaciones) los cambios infinitesimales en los parámetros del sistema pueden causar cambios cualitativos significativos en las soluciones de equilibrio. En términos generales, la construcción de un diagrama de bifurcación consta de los siguientes pasos [4],[5]: a) encontrar la primera solución de equilibrio de, b) basada en la primera solución, encontrar otras soluciones de equilibrio basadas en un método de continuación[8], c) determinación de la estabilidad de cada solución. Cada paso descrito a continuación. [9]

El análisis de estabilidad del sistema basado en el enfoque de bifurcación requiere de un conjunto de ecuaciones diferenciales y / o algebraicas que contienen dos tipos de variables: estados y parámetros. En el caso, el modelo dinámico EAF solo se caracteriza por un conjunto de ecuaciones diferenciales dependientes de parámetros, es decir. [9]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \quad (1)$$

Donde $\dot{\mathbf{x}} \in \mathfrak{R}^n$ es un vector de las variables de estado dinámico y $\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{R}^k$ es un vector de parámetros del sistema que cambian lentamente moviendo el sistema de un punto de equilibrio a otro. En este artículo, restringimos $[\mathbf{k}]$ para que sea uno, tal que $\boldsymbol{\lambda}$ es escalar.

Soluciones de equilibrio

El punto de partida para el análisis del modelo de sistema de potencia (1) es la identificación de puntos de equilibrio que definen solución de equilibrio del sistema bajo análisis. para un parámetro fijo arbitrario λ_e , los puntos de equilibrio $\mathbf{Pe} = (\mathbf{x}_e, \lambda_e)$ están dados por los valores de $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}(\lambda_e)$ y λ_e que satisfacen el conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales dadas por

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda_e) \quad (2)$$

Una vez que se ha calculado una primera solución de equilibrio, es posible saber cómo varían las soluciones de (2) con el incremento del parámetro A del sistema en pasos finitos a lo largo de una trayectoria especificada. En cada paso, el nuevo punto de equilibrio se determina mediante la solución correspondiente de (2) basada en un método continuo [8]. Puede encontrarse una descripción matemática detallada de este método en la solución de equilibrio obtenida mediante la resolución (2) implica que el sistema de potencia está en reposo, esto no significa necesariamente que la solución represente una condición operativa estable [6],[7]. La estabilidad de la solución está determinada por calcular la estabilidad de los puntos de equilibrio como se describe a continuación. [9]

A. Estabilidad de las soluciones de equilibrio

La estabilidad de un punto de equilibrio aislado, $Pe = (x_e, \lambda_e)$, que define una estabilidad del sistema de potencia local, puede determinarse linealizando (1) y llevando a cabo un análisis de autovalores al sistema resultante [20]. Esta linealización se obtiene aproximando (1) mediante su expansión de la serie Taylor de primer grado en la vecindad del punto de equilibrio de interés. [9] El sistema resultante es,

$$[\Delta \dot{x}] = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{(x_e, \lambda_e)} [\Delta x] \quad (3)$$

donde el primer término en el lado derecho de (3) se conoce como Jacobian, J_x . Basado en este modelo linealizado, el comportamiento cualitativo puede determinarse a partir de un análisis de autovalores. Para el sistema de ODEs dado en (1) y que tiene un punto de equilibrio $Pe = (x_e, \lambda_e)$, se produce una bifurcación de Hopf cuando se cumplen las siguientes condiciones: La matriz J_x tiene un par simple de valores propios imaginarios puros, $i, e, \gamma(\lambda_e) = \alpha(\lambda_e) \pm j\omega(\lambda_e)$ así que $\alpha(\lambda_b) = 0$ y $\omega(\lambda_b) > 0$, y ningún otro valor propio con parte real igual a cero.

La matriz J_x tiene un par simple de valores propios imaginarios puros, $i, e, \gamma(\lambda_e) = \alpha(\lambda_e) \pm j\omega(\lambda_e)$ así que $\alpha(\lambda_b) = 0$ y $\omega(\lambda_b) > 0$, y ningún otro valor propio con parte real igual a cero.

$$a) \quad \left. \frac{d\{R_{ey}(\lambda)\}}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_e} = \left. \frac{d\alpha(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_e} \neq 0$$

La primera condición asegura que el punto de equilibrio es un punto no hiperbólico. La segunda condición implica un cruce de velocidad transversal o no nulo del eje imaginario, que se denomina condición de transversalidad.

Una bifurcación de Hopf se caracteriza por la aparición de una órbita periódica de pequeña amplitud (ciclo límite) desde un punto de equilibrio cuando se cambia un parámetro del sistema. Si este comportamiento oscilatorio conlleva oscilaciones pequeñas o crecientes depende de si la bifurcación es supercrítica o vital crítica, respectivamente [8]. El primero ocurre cuando un ciclo límite estable se fusiona con un punto de equilibrio inestable; por lo tanto, la órbita periódica emerge para valores de parámetros en los cuales el punto de equilibrio ha perdido estabilidad. En este caso, las trayectorias de solución convergen a una solución periódica de pequeña amplitud. Una bifurcación de Hopf subcrítica se produce cuando un ciclo límite inestable se fusiona con un punto de equilibrio estable. Por lo tanto, la órbita periódica aparece para los valores de los parámetros en los que el punto de equilibrio es estable. En este caso, se cambia la amplitud del comportamiento oscilatorio en el parámetro de pliegues ilimitados. [9]

MATERIALES Y MÉTODOS

- Software para problemas de continuación y bifurcación en ecuaciones de orden diferencial XPPAUT 50

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el análisis de sistemas lineales y no lineales, se debe ser capaz de modelar sistemas dinámicos y analizar sus respectivas características. Ya que éstas están compuestas por un conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del sistema con precisión o, al menos de la forma más estable. Eso dependiendo del sistema a trabajar, ya sean mecánicos, eléctricos, térmicos, económicos, biológicos, etc., y estos se describen en términos de ecuaciones diferenciales, gracias a esto logramos modelar dos sistemas, el primero es en busca del control de la posición del motor DC, donde obtenemos un sistema lineal, posterior a este analizamos el pitch de una aeronave.

Posición Motor cc

Un motor de corriente continua, proporciona directamente movimiento giratorio, junto con ruedas y cables, puede proporcionar movimiento de traslación. El circuito equivalente eléctrico de la armadura y el diagrama de cuerpo libre del rotor muestran en la figura 1.

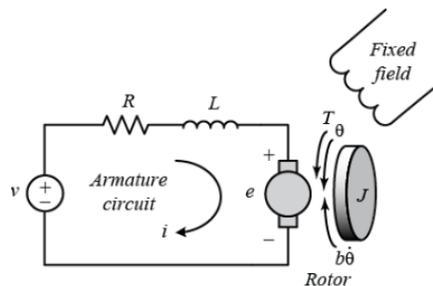


Fig. 1 Circuito equivalente eléctrico de la armadura y diagrama de cuerpo libre del rotor.

Para obtener las ecuaciones del sistema, en general, el par generado por un motor de CC es proporcional a la corriente de la armadura y a la intensidad del campo magnético. En este ejemplo, supondremos que el campo magnético es constante y, por lo tanto, que el par del motor es proporcional solo a la corriente del inducido i por un factor constante K_t como se muestra en la ecuación siguiente. Esto se conoce como motor controlado por la armadura.

$$T = K_t i \quad (4)$$

La Fuerza electromotriz inversa, e es proporcional a la velocidad angular del eje por un factor constante K_b

$$e = K_b \dot{\theta} \quad (5)$$

En las unidades [SI], las constantes de par motor y constantes de la fuerza electromotriz inversa son iguales, es decir $K_t = K_e$; por lo tanto, usaremos K para representar tanto la constante de torque del motor como la constante de la frecuencia de retorno de la fuerza.

De la figura anterior, podemos derivar las siguientes ecuaciones gobernantes basadas en la segunda ley de Newton y la ley de voltaje de Kirchhoff.

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = Ki \quad (6)$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V - K\dot{\theta} \quad (7)$$

Función de transferencia

Aplicando la transformada de Laplace, las ecuaciones de modelado anteriores se pueden expresar en términos de la variable s de Laplace.

$$s(Js + b)\Theta(s) = KI(s) \quad (8)$$

$$(Ls + R)I(s) = V(s) - Ks\Theta(s) \quad (9)$$

Llegamos a la siguiente función de transferencia de bucle abierto eliminando $I(s)$ entre las dos ecuaciones anteriores, donde la velocidad de rotación se considera la salida y la tensión de la armadura se considera la entrada.

$$P(s) = \frac{\dot{\Theta}(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js + b)(Ls + R) + K^2} \quad \left[\frac{\text{rad/sec}}{V} \right] \quad (10)$$

Sin embargo, durante este sistema veremos la posición como salida. Podemos obtener la posición integrando la velocidad, por lo tanto, solo tenemos que dividir la función de transferencia anterior por s .

$$\frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{K}{s((Js + b)(Ls + R) + K^2)} \quad \left[\frac{\text{rad}}{V} \right] \quad (11)$$

Matriz de espacio-estados

Las ecuaciones diferenciales de arriba también se pueden expresar en forma de espacio de estado eligiendo la posición del motor, la velocidad del motor y la corriente de armadura como variables de estado. De nuevo, el voltaje de la armadura se trata como la entrada y la posición de rotación se elige como la salida.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{J} & \frac{K}{J} \\ 0 & -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} V \quad (12)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} \quad (13)$$

En el software XPPAUTO 50, es empleado para ayudar al análisis de bifurcaciones, y donde podemos observar la resultante de nuestro sistema lineal de la posición del motor con los datos iniciales tomados de la matriz de espacio y estados obtenida anteriormente, como se puede observar en la figura 2.

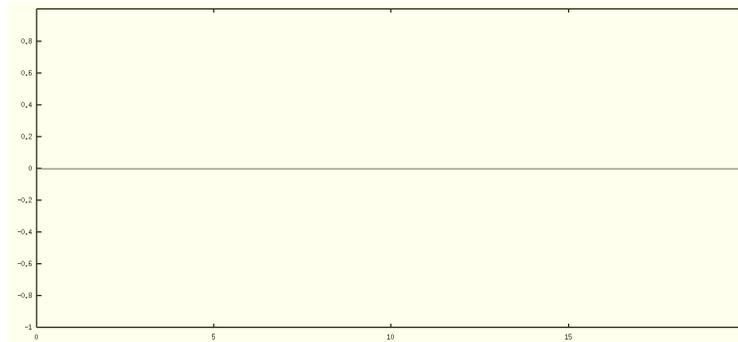


Fig. 2 Respuesta en tiempo actual del caso posición del motor (Sistema lineal).

Pitch aeronave

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un avión son un conjunto muy complicado de seis ecuaciones diferenciales acopladas no lineales. Sin embargo, bajo ciertas suposiciones, pueden desacoplarse y linealizarse en ecuaciones longitudinales y laterales. El tono del avión se rige por la dinámica longitudinal. En este caso, diseñaremos un piloto automático que controle el tono de una aeronave.

Los ejes y fuerzas de coordenadas básicas que actúan en un avión se muestran en la figura 3 que se proporciona a continuación.

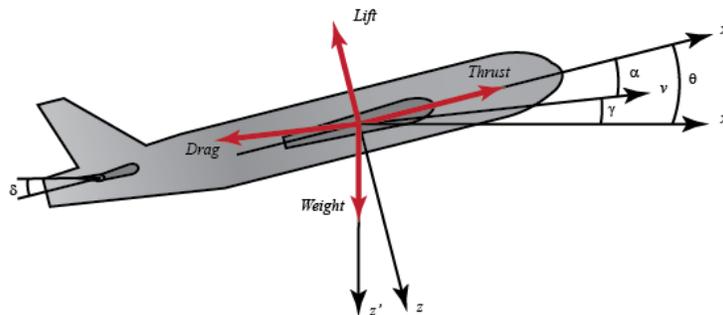


Fig. 3 Los ejes y fuerzas de coordenadas básicas que actúan en un avión

Supondremos que la aeronave está en crucero constante a altitud y velocidad constantes; por lo tanto, las fuerzas de empuje, arrastre, peso y elevación se equilibran entre sí en las direcciones x e y . También asumiremos que un cambio en el ángulo de cabeceo no cambiará la velocidad de la aeronave bajo ninguna circunstancia (no es realista pero simplifica un poco el problema). Bajo estas suposiciones, las ecuaciones de movimiento longitudinales para la aeronave se pueden escribir de la siguiente manera.

$$\dot{\alpha} = \mu\Omega\sigma[-(C_L + C_D)\alpha + \frac{1}{(\mu - C_L)}q - (C_W \sin \gamma)\theta + C_L] \quad (14)$$

$$\dot{q} = \frac{\mu\Omega}{2i_{yy}} [[C_M - \eta(C_L + C_D)]\alpha + [C_M + \sigma C_M(1 - \mu C_L)]q + (\eta C_W \sin \gamma)\delta] \quad (15)$$

$$\dot{\theta} = \Omega q \quad (16)$$

Para este sistema, la entrada será el ángulo de deflexión del ascensor δ y la salida será el ángulo θ de inclinación del avión.

Función de transferencia y modelos de espacio y estado

Antes de encontrar la función de transferencia y los modelos de espacio de estado, conectemos algunos valores numéricos para simplificar las ecuaciones de modelado que se muestran arriba:

$$\dot{\alpha} = -0.313\alpha + 56.7q + 0.232\delta \quad (17)$$

$$\dot{q} = -0.0139\alpha - 0.426q + 0.0203\delta \quad (18)$$

$$\dot{\theta} = 56.7q \quad (19)$$

Estos valores se toman de los datos de uno de los aviones comerciales de Boeing.

Función de transferencia

Para encontrar la función de transferencia del sistema anterior, necesitamos tomar la transformada de Laplace de las ecuaciones de modelado anteriores. Recuerde que al encontrar una función de transferencia, se deben asumir condiciones iniciales cero. La transformada de Laplace de las ecuaciones anteriores se muestra a continuación.

$$sA(s) = -0.313A(s) + 56.7Q(s) + 0.232\Delta(s) \quad (20)$$

$$sQ(s) = -0.0139A(s) - 0.426Q(s) + 0.0203\Delta(s) \quad (21)$$

$$s\Theta(s) = 56.7Q(s) \quad (22)$$

Después de algunos pasos de álgebra, debe obtener la siguiente función de transferencia.

$$P(s) = \frac{\Theta(s)}{\Delta(s)} = \frac{1.151s + 0.1774}{s^3 + 0.739s^2 + 0.921s} \quad (23)$$

Espacio de estados

Reconociendo el hecho de que las ecuaciones de modelado anteriores ya están en la forma de variable de estado, podemos reescribirlas como matrices como se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.313 & 56.7 & 0 \\ -0.0139 & -0.426 & 0 \\ 0 & 56.7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.232 \\ 0.0203 \\ 0 \end{bmatrix} [\delta] \quad (24)$$

Como nuestra salida es ángulo de cabeceo, la ecuación de salida es la siguiente.

$$y = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} \quad (25)$$

En el software XPPAUTO 50, es empleado para ayudar al análisis de bifurcaciones, y donde podemos observar la resultante de nuestro sistema no lineal del pitch de una aeronave con los datos iniciales tomados de la matriz de espacio y estados obtenida anteriormente, como se puede observar en la figura 4.

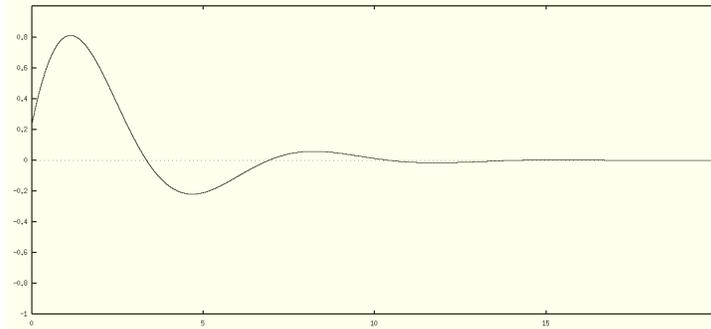


Fig. 4 Respuesta en tiempo actual del caso pitch de una aeronave (Sistema no lineal).

CONCLUSIONES

Se presento el funcionamiento y el análisis de la estabilidad de la posición de un motor y el pitch de una aeronave, donde se usó un enfoque de espacio y estado para representar en el dominio del tiempo la dinámica de los dos sistemas presentados en este análisis.

Gracias al uso del software XPPAUT 50, nos facilitó el análisis de los dos sistemas y su respectiva configuración de los parámetros para observar si eran sistemas lineales o no lineales, aplicando de igual forma las ecuaciones resultantes del análisis de espacios y estados en el archivo ODE, para que esta sea asociada al software y así obtener las respuestas en tiempo actual del caso que se aplicaba.

Se observo que haciendo el proceso respectivo para cada caso que se analizaba, se concluye que en el caso del control de la posición del motor es un sistema lineal, por lo que se afirma que es una maquina saludable ya que no presenta ninguna falla al observar la respuesta en tiempo actual de este caso que es lineal, y también en el caso del control del pitch de una aeronave se observó que es un sistema no lineal, ya que es observado en la respuesta de tiempo actual, y se determina que la maquina tiene un transitorio, pero no muy grande ya que su estabilidad es rápida.

En esta contribución se utilizarón dos modelos, el primero de un sistema del control de la posición del motor, y el otro de un sistema del control del pitch de una aeronave, para que sea aplicada la teoría de bifurcación en el más factible, en este caso sería el del sistema no lineal para que sea analizado en futuras contribuciones.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo de investigación fue realizado bajo la supervisión del Dr. Miguel Ángel Gómez Martínez, a quien le ofrezco un gran agradecimiento, por hacer posible la realización de esta contribución. Además, agradecer a la Universidad Santo Tomas de Aquino de Bucaramanga por su apoyo, y mi mas profundo agradecimiento a la Universidad de Guanajuato, por ofrecer esta oportunidad de ser integrante de los veranos de investigación que se presentan cada año en este estado, por su apoyo económico, y por su cálido acogimiento. A mi familia y seres queridos.

REFERENCIAS

- [1] Galvis Cardona, Jesus Felipe. (2010). Aplicación de la teoría de bifurcaciones al análisis de estabilidad de un Sistema de potencia,(Tesis de pregrado), Universidad tecnologica de Pereira, Pereira.
- [2] Perez, M. Alberto, P. Hidalgo, Analia, y Berenguer, E. Perez. (2008). Introducción a los sistemas de control y modelo matematico para sistemas lineales invariantes en el tiempo. San Juan. Universidad Nacional de san Juan.
- [3] Benjamin, C. Kuo (1996). Sistemas de control automatico. Mexico DF. Edimsa S.A
- [4] N. Koppel and R.B. Washburn. "Chaotic motions in the two-degree-of-freedom swing equations", IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-29, pp,738-746, Nov,1982.
- [5] I. Dobson and H. D. Chiang, "Toward a theory of voltage collapse in electric power systems," Syst. Contr Left., vol. 13,pp. 253-262, 1989.
- [6] W. D. Rosehart and C. A. Cañizares, "bifurcation analysis of various power system models," int. J. Elect. Power Energy Sys., Vol. 21, no. 3, PP. 171-182, Mar. 1999.
- [7] C. A Cañizares, "On bifurcations, voltage collapse and load modeling," IEEE Trans. Power Syst., Vol. 10, pp. 512-522, Feb. 1995.
- [8] H.S. Strogatz, Nonlinear Dynamics and chaos. Cambridge, MA: Perseus publishing, 2000.
- [9] M.A., Gómez Martínez, M. A., & Fuerte Esquivel, C. R. (2005). "Application of Bifurcations Theory to Assess Nonlinear Oscillations Produced by AC Electric Arc Furnaces." IEEE Trans. Power Delivery, vol 20, pp. 801-803.