JÓVENES EN LA CIENCIA
REVISTA DE DIVULGACIÓN CIENTÍFICA

ANÁLISIS DE ALGORITMOS DIGITALES PARA LAS DESCOMPOSICIÓN DE VALORES SINGULARES

Pedraza Padilla, Deyarine (1), Cabal Yépez, Eduardo (2), Ledesma Carrillo, Luis Manuel (3)

1 [Ingeniería de Sistema, Politécnico Costa Atlántica] | [ppdeyarine@gmail.com]

2 [Departamento de estudio multidisciplinario, División de ingenierías, Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato] | [e.cabalyepez@gmail.com]

3 [Departamento de estudio multidisciplinario, División de ingenierías, Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato] | [l.m.ledesmacarrillo@gmail.com]

Resumen

Los valores singulares son el resultado de la búsqueda de la representación de reducir las formas cuadráticas a forma diagonal mediante cambios de base ortogonal, se utilizó la descomposición QR para obtener los valores singulares de las matrices. Se compararon los resultados con la función predeterminada del SVD (Singular Value Descomposition) de Matlab. A futuras investigaciones se espera que el algoritmo QR realice menos iteraciones, y que su tiempo de respuesta se vea reducido al llevarse a cabo con matrices de mayor dimensión.

Abstract

The singular values are the result of the search for the representation of reducing the quadratic forms to diagonal form by orthogonal base changes, QR decomposition was used to obtain the singular values of the matrices. The results were compared to Matlab's SVD (Singular Value Descomposition) default function. Further research is expected that the QR algorithm will perform fewer iterations, and that its response time will be reduced when carried out with larger matrices.

.

Palabras Clave Algoritmo QR; Ortogonal; algebra lineal; matrices; SVD.

INTRODUCCIÓN

El surgimiento de los valores singulares no nació como el resultado de la profundización del conocimiento en las matemáticas, sino como el resultado al cuestionamiento que realizaron geómetras del siglo XIX, sobre la posibilidad de reducir unitariamente una forma cuadrática a forma diagonal, utilizando el lenguaje actual, entre los geómetras que aportaron a estas ideas están: Eugenio Beltrami, Camille Jordan, James Joseph Sylvester, Erhard Scmidt o Hermann Weyl [1]

La descomposición de valores singulares (SVD), han sido unos de los grandes desarrollos aportados por el álgebra lineal moderna con diferentes aplicaciones en campo como: la visión artificial, recuperación de información de base de datos, computación lingüística, procesamiento de señales e imágenes, pseudoinversa, entre otros.

Los valores singulares son el resultado de la búsqueda de la representación de reducir las formas cuadráticas a forma diagonal mediante cambios de base ortogonal.

SVD (Singular Value Descomposition)

Sea *m, n* enteros positivos y A una matriz *m x n*

Entonces una descomposición en valores singulares de A es una factorización donde:

Si A es una matriz *m x n,* los valores singulares de A son las raíces de los valores propios de [2]

$A^T A$

Ejemplo SVD

Veremos un ejemplo numérico de la descomposición SVD y de la reducción de la dimensión a través de la misma.

Partimos de una matriz A de dimensiones [5, 3] su descomposición de valores singulares viene dada por:

```
A =

    0.8147    0.0975    0.1576
    0.9058    0.2785    0.9706
    0.1270    0.5469    0.9572
    0.9134    0.9575    0.4854
    0.6324    0.9649    0.8003


U =

   -0.2439    0.6486   -0.1591   -0.6015   -0.3644
   -0.4940    0.1655   -0.7006    0.3760    0.3104
   -0.3688   -0.6649   -0.2370   -0.1497   -0.5859
   -0.5236    0.2418    0.5645    0.5071   -0.3026
   -0.5350   -0.2268    0.3303   -0.4661    0.5796

S =

    2.5686         0         0
         0    0.8370         0
         0         0    0.6551
         0         0         0
         0         0         0

V=

   -0.5877    0.8020   -0.1065
   -0.5375   -0.2886    0.7923
   -0.6047   -0.5229   -0.6007
```

fig. 1 SVD de la matriz a

La matriz U está compuesta por los cinco vectores singulares izquierdos; la matriz V por los tres vectores singulares derechos; la matriz S (∑) es diagonal y está formada por los valores singulares.

Las matrices U y V tienen dimensiones [5,5] y [3,3] respectivamente y están formadas a partir de vectores singulares. Por otro lado, la matriz diagonal S (∑) contiene en su diagonal principal los valores singulares dispuestos en orden decreciente

Algoritmo QR

La descomposición QR es a menudo el primer paso en muchos algoritmos para resolver los problemas de la matriz, incluyendo los sistemas lineales, valores propios y valores singulares.

Si A es una matriz *m x n* con columnas linealmente independientes, entonces A puede factorizarse en la forma

A = QR

En la que Q es una matriz con columnas ortogonales y R es una matriz triangular.

Se utilizó la descomposición QR para obtener la izquierda y otra vez para obtener el QR a la derecha. Este procedimiento hace triangular inferior triangular y luego superior de manera alternativo. Con el tiempo se convierte en tanto triangular superior e inferior triangular, que es diagonal con los valores singular en la diagonal.

MATERIALES Y MÉTODOS

Metodología

La metodología utilizada para cumplir con los objetivos del proyecto se llevó con los siguientes pasos:

1. Se realizó una búsqueda bibliografía de la descomposición de valores singulares
2. Analices del algoritmo QR.
3. Pruebas del algoritmo para obtener los valores singulares.
4. Comparación de los resultados arrojados por el algoritmo QR y la función predeterminada SVD de Matlab.

Se realizó un diagrama del algoritmo QR, donde se muestran las pautas que sigue el código, esto con el fin de explicar de manera más detallada el algoritmo.

En el diagrama se explica paso a paso, comenzando con los datos de entrada, la definición de matrices, siguiendo con definición de la tolerancia de error y el número de bucle, después realiza la factorización QR, verifica los valores de la diagonal, compara los valores de salida y asigna valor a la diagonal.

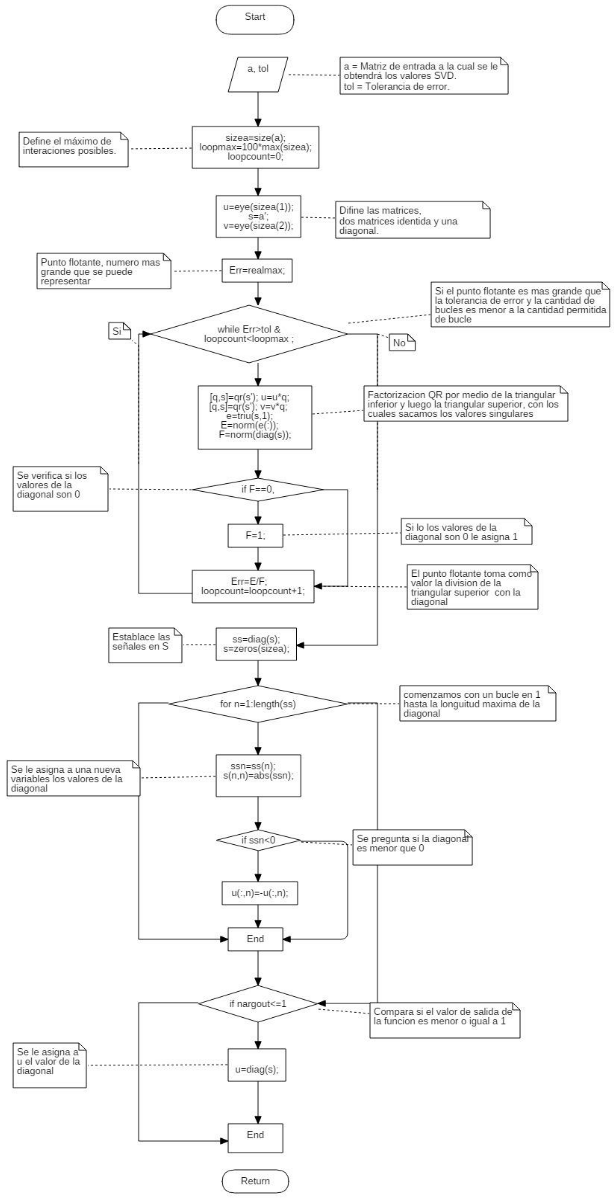

Fig. 2 DIAGRAMA DE FLUJO: Algoritmo QR, elaboración propia.

En la Fig. 2 se observa la estructura del algoritmo QR, explicando cada parte del código

Herramientas

- *Matlab*

Matlab Es un programa matemático, que ofrece un entorno de cálculo técnico de altas precisiones para cálculo numérico, se utiliza para el procesamiento de señales, aprendizaje automático, procesamiento de imágenes, visión artificial, comunicaciones, finanzas computacionales, diseño de control robótico y muchos campos más.

Matlab cuenta con un lenguaje propio, su lenguaje está basado en matrices que expresa las matemáticas computacionales.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Utilizamos la función predeterminada del SVD de Matlab para comparar los resultados arrojados por la función del algoritmo QR, a continuación podemos observar las comparaciones.

Comparación de los resultados de una matriz 4X4.

```
>> [u,s,v] = svdalgorithnext(A)

u =

    0.5892    0.6836   -0.3559    0.2425
    0.0189   -0.5369   -0.7781    0.3254
    0.5041   -0.3738    0.5145    0.5843
    0.6312   -0.3235   -0.0554   -0.7028


s =

    4.5986         0         0         0
         0    3.6957         0         0
         0         0    3.1559         0
         0         0         0    0.4848


v =

    0.6178   -0.0471    0.4248   -0.6601
    0.2921    0.0930   -0.8993   -0.3120
   -0.3738    0.8529    0.0893   -0.3533
    0.6271    0.5115    0.0537    0.5849

>>
```

Fig. 3 Resultados arrojados por el algoritmo QR.

```
     1     2     1     3
    -1     2    -2    -1
     2    -1    -2     1
     2     1    -2     1

>> [ U, S, V ] = svd(A)

U =

    0.5892   -0.6836    0.3559    0.2425
    0.0189    0.5369    0.7781    0.3254
    0.5041    0.3738   -0.5145    0.5843
    0.6312    0.3235    0.0554   -0.7028


S =

    4.5986         0         0         0
         0    3.6957         0         0
         0         0    3.1559         0
         0         0         0    0.4848


V =

    0.6178    0.0471   -0.4248   -0.6601
```

Fig. 4 Resultados arrojados por el SVD Matlab.

Comparación de una matriz 6X5 arrojando los siguientes resultados

```
>> [ U, S, V] = svdalgorithnext(A)

U =

    0.2984   -0.3894    0.1576    0.0786   -0.5385   -0.6621
    0.5505   -0.3024   -0.3247   -0.1390   -0.3367    0.6061
    0.4428    0.2522   -0.6567    0.1363    0.3711   -0.3908
    0.4789   -0.0761    0.4909   -0.5432    0.4730   -0.0717
    0.2746   -0.2028    0.3355    0.8074    0.2954    0.1785
    0.3273    0.8040    0.2913    0.0952   -0.3846    0.0681


S =

    2.8036         0         0         0         0
         0    0.8365         0         0         0
         0         0    0.7035         0         0
         0         0         0    0.4207         0
         0         0         0         0    0.2150
         0         0         0         0         0


V =

    0.3666    0.1603   -0.5362   -0.2419    0.7028
    0.3781    0.6421    0.4424    0.4738    0.1570
    0.6072    0.1143    0.1483   -0.6299   -0.4466
    0.3352   -0.0205   -0.6325    0.5091   -0.4775
    0.4915   -0.7407    0.3078    0.2471    0.2325
S =
```

Fig. 4 Resultados arrojados por el SVD Matlab.

```
         0         0         0         0         0


V =

   -0.3666   -0.1603    0.5362   -0.2419   -0.7028
   -0.3781   -0.6421   -0.4424    0.4738   -0.1570
   -0.6072   -0.1143   -0.1483   -0.6299    0.4466
   -0.3352    0.0205    0.6325    0.5091    0.4775
   -0.4915    0.7407   -0.3078    0.2471   -0.2325
```

Fig. 5 Resultados arrojados por el algoritmo QR.

CONCLUSIONES

A partir de los resultados podemos observar los mismos valores por parte de ambas funciones, tanto como la dada por el algoritmo QR, como la función predeterminada del SVD de Matlab.

A futuras investigaciones se espera que el algoritmo QR realice menos iteraciones, y que su tiempo de respuesta se vea reducido al llevarse a cabo con matrices de mayor dimensión.

AGRADECIMIENTOS

A mis padres Iván Esteban Pedraza Zambrano y Doris María Padilla de la Hoz por su apoyo y colaboración en la estancia de verano, porque si ellos no fuera posible mi investigación

Agradezco a la Universidad de Guanajuato por la oportunidad y el apoyo para la realización de la investigación, y al departamento de estudios multidisciplinario, al Dr. Eduardo Cabal Yépez y al M.I Luis Manuel Ledesma Carrillo, por su colaboración y aportes de conocimiento.

REFERENCIAS

[1] Ion Zaballa. (2006) departamento de matemática aplicada y EIO, Euskal Herriko Unibertsitatea, recuperado de http://www.ehu.eus/izaballa/Cursos/valoresingulares.

[2] (2010) departamento de matemáticas, Universidad nacional de la Plata, recuperado de http://www.mate.unlp.edu.ar/practicas

Stanley I. Grossman., (1987). Algebra lineal (2st ed.) California, Iberoamérica.

R.L. Burden, J. Douglas Faires, (1985), Análisis Numérico, México, Grupo Editorial Iberoamericana.

J. Demmel,(1997), Applied Numerical Linear Algebra, SIAM, Philadelphia,

K. Fan, A. J. Hoffman, Some metric inequalities in the space of matrices. Proceedings

R. Horn, (1991), Ch. Johnson, Topics in Matrix Analisys. Cambridge University Press. New York,