

# ANÁLISIS MECÁNICO DE UN SENSOR DE TEMPERATURA TIPO MEMS

González Esparza Daniel (1), Aguilera Cortés Luz Antonio (2)

<sup>1</sup>[Licenciatura en ingeniería Mecánica] | [dgonzalez\_esp@hotmail.com]

<sup>2</sup>[Departamento de ingeniería Mecánica, División de Ingenierías Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato] | [aguilera@ugto.mx]

## Resumen

La temperatura es un parámetro muy importante en casi cualquier experimento. La investigación moderna, nos exige arreglos experimentales cada vez más complejos o con dificultades muy específicas, las cuales descartan el uso de sensores tradicionales. Por lo cual, la tecnología MEMS (sistemas micro-electromecánicos) es ampliamente utilizada para superar dificultades técnicas. Es nuestro interés implementar mejoras en el diseño de este tipo de dispositivos, mediante su modelado matemático. En este trabajo se presenta el análisis matemático de una micro viga en voladizo, utilizada como sensor de temperatura. La micro-viga es compuesta por dos materiales metálicos con diferente coeficiente de expansión térmica, la cual es expuesta a una fuente de calor (placa a temperatura constante) induciendo una deflexión en el extremo libre. El modelo matemático desarrollado, es capaz de relacionar la deflexión de la viga con su cambio de temperatura. Además, fue analizado para encontrar la configuración geométrica que maximiza su desempeño, así como su tiempo de respuesta.

## Abstract

Temperature is a highly important parameter in almost any experiment. Modern research, requires complex experimental arrangements or specific technical challenges. Thus, making conventional sensors obsolete. For this reason, MEMS technology (Micro electromechanical systems) has been widely used to overcome technical difficulties. We are interested in implement design improvements, through mathematical modeling. In this study, a mathematical analysis of a microcantilever beam employed as a temperature sensor is presented. The microbeam is a composite structure of two metallic materials, with different thermal expansion coefficients. It is exposed to a heat source (constant temperature plate) bending the cantilever free end. The mathematical model relates the beam deflection and its temperature increase. Furthermore, the model was used to find the geometrical configuration that maximize its performance, as well as its time response.

## Palabras Clave

MEMS; Temperatura; Sensor; Viga en voladizo;

## INTRODUCCIÓN

### MEMS

Los MEMS (Sistemas micro-electromecánicos) son un conjunto de mecanismos y arreglos electrónicos con la intención de desarrollar, ya sea una acción en concreta o sensor una variable de interés. Todo esto por medio de alguna excitación externa (campo magnético, temperatura, humedad etc.) que cambia de un estado a otro el sistema, por medio de éste cambio se puede realizar una medición como una variable de salida (que puede ser; desplazamiento, capacitancia, resistencia eléctrica, etc.). Las ventajas principales de los MEMS son; bajo costo de producción, sistemas compactos y precisos, bajo consumo energético y amplio rango de aplicación. Algunas de las aplicaciones más comunes en el área de mecánica son sensores de desplazamiento angular y lineal, aceleración, torque y fuerza, deformación, etc. [1]

En las investigaciones recientes se han realizado pruebas experimentales y estudios analíticos a todo tipo de sensores con la finalidad de aumentar su sensibilidad.

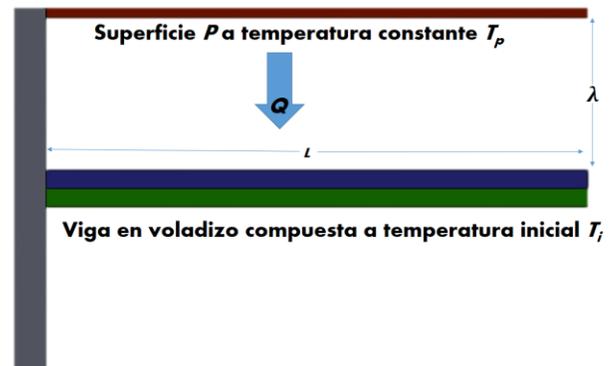
En este trabajo se realiza el estudio de un sensor de temperatura a través de un modelo de una viga en voladizo compuesta por dos materiales; oro y silicio. El objetivo principal es obtener los parámetros que aumenten la sensibilidad del sistema [3].

## MATERIALES Y MÉTODOS

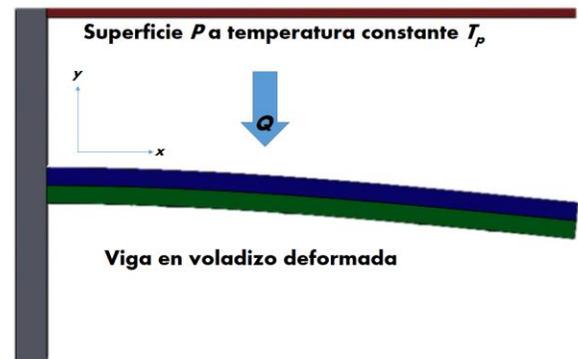
### ANÁLISIS DE VIGA DE BERNOULLI

El problema a analizar consiste en una viga en voladizo, de longitud  $L$ , compuesta por dos materiales con diferente coeficiente de expansión térmica. El sistema se encuentra a una temperatura inicial  $T_i$ , y es excitado por una fuente de calor  $Q$  suministrada por una superficie  $P$  localizada en la parte superior, donde existe una separación  $\lambda$  entre  $P$  y la viga, tal como se puede

ver en la **Imagen 1 (a)**. La superficie  $P$  se encuentra a una temperatura  $T_p$ , mayor a  $T_i$ . La transferencia de calor de la superficie  $P$  hacia la viga en voladizo provocará un cambio de temperatura en la misma y consecuentemente la viga en voladizo experimentará una deflexión, ver **Imagen 1 (b)**.



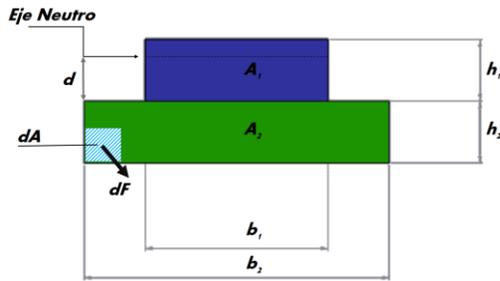
(a)



(b)

**IMAGEN 1:** (a) Geometría inicial en estado de equilibrio.  
(b) Estado de la viga en voladizo después de la excitación.

Los parámetros de interés para el caso de estudio son la longitud  $L$ , altura  $h$ , ancho  $b$ , coeficiente de expansión térmica  $\alpha$ ; área de la sección transversal  $A$  y el módulo de Young  $E$ . El material de la viga superior es Oro mientras que el material de la viga inferior es Silicio. En adelante se usarán los subíndices 1 y 2 para la viga superior e inferior respectivamente, A su vez, se define  $d$  como la distancia entre el eje neutro y la superficie donde se unen la viga 1 y 2, tal como se muestra en la **Imagen 2**.



**IMAGEN 2:** Vista transversal de la viga compuesta con sus respectivos parámetros de diseño.

Los ejes coordenados estarán orientados de acuerdo a la **Imagen 1**, donde el origen se encontrará en el eje neutro.

Considerando la teoría de Bernoulli-Euler en una viga, se puede estimar el esfuerzo mecánico de la viga en voladizo. A su vez, se conoce que el esfuerzo térmico se puede modelar como el producto del coeficiente de expansión térmica, el cambio de temperatura y el módulo de elasticidad. Con las consideraciones anteriores, analizando un elemento diferencial de área, ver **Imagen 2**, se puede estimar la fuerza aplicada a cada elemento de la viga en la dirección  $x$ , tal como se muestra en la **Ecuación (1)**.

$$dF = \sigma dA \quad (1)$$

Donde  $\sigma$  equivale a la suma del esfuerzo térmico y mecánico. Con las consideraciones anteriores, mediante una integral sobre las áreas  $A_1$  y  $A_2$ , y aplicando la condición de equilibrio dinámico en la viga en voladizo, Se llega a la **Ecuación (2)** [2].

$$\frac{d^2 w}{dx^2} \left( d(-h_1 b_1 - n h_2 b_2) + \frac{n b_2 h_2^2 - b_1 h_1^2}{2} \right) + \dots \quad (2)$$

$$-\Delta T (\alpha_1 b_1 h_1 + n \alpha_2 b_2 h_2) = 0$$

Donde  $n$  es la relación entre el módulo de Young de la viga 1 y la viga 2,  $w$  es el desplazamiento de la viga en la dirección  $y$ . De manera análoga, se realiza una integral de momentos sobre las áreas  $A_1$  y  $A_2$  y finalmente aplicando la condición de equilibrio dinámico de momento angular, se obtiene la **Ecuación (3)**.

$$\frac{d^2 w}{dx^2} \left[ d^2 (b_1 h_1 - n b_2 h_2) + d (b_1 h_1^2 - n b_2 h_2^2) + \frac{b_1 h_1^3 + n b_2 h_2^3}{3} \right] + \dots \quad (3)$$

$$+ \Delta T \left[ d (\alpha_1 b_1 h_1 + n \alpha_2 b_2 h_2) + \frac{\alpha_1 b_1 h_1^2 + n \alpha_2 b_2 h_2^2}{2} \right] = 0$$

Resolviendo las **Ecuaciones (2)** y **(3)** para la segunda derivada, y posteriormente integrando la segunda derivada de  $w$  con respecto a  $x$ , se obtiene la **Ecuación (4)**, que corresponde a la relación entre la deflexión de la viga como una función del cambio de temperatura para todo valor de  $x$ .

$$w(x) = \frac{(3n b_1 b_2 h_1 h_2 (h_1 + h_2) (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T) x^2}{2 (b_1^2 h_1^4 + n^2 b_2^2 h_2^4 + n b_1 b_2 h_1 h_2 (6 h_1 h_2 + 4 h_1^2 + 4 h_2^2))} \quad (4)$$

En la **Ecuación (4)** se puede observar que el desplazamiento de la viga en voladizo depende directamente de los parámetros de diseño, así como del cambio de temperatura inducida a la misma. En este trabajo solo se enfocó a optimizar la deflexión de la viga en voladizo considerando los parámetros  $h_1$  y  $h_2$ , que corresponden a la altura de cada viga.

## ANÁLISIS TÉRMICO

El estudio se realizó con la ecuación de difusión de calor para un sólido en estado transitorio, y se consideró una resistencia térmica interna despreciable para cada una de las vigas. Con base en estas consideraciones se llega a las **Ecuaciones (5)** y **(6)**, donde  $R$ ,  $T$ ,  $\rho$ ,  $c$ ,  $V$ ,  $k$  y  $t$  corresponden a la resistencia térmica, temperatura, densidad, calor específico, volumen, conductividad térmica y tiempo, respectivamente. Los sub-índices  $d$  y  $u$  de las resistencias térmicas corresponden a la causada entre cada una de las vigas y la superficie  $P$ . El subíndice  $u$  se usa para la viga superior y  $d$  para la inferior.

$$\frac{T_p - T_1}{R_u} - \frac{T_1 - T_2}{R_1 - R_2} = \rho_1 c_1 V_1 \frac{dT_1}{dt} \quad (5)$$

$$\frac{T_p - T_2}{R_d} + \frac{T_1 - T_2}{R_1 - R_2} = \rho_2 c_2 V_2 \frac{dT_2}{dt} \quad (6)$$

Reacomodando las **Ecuaciones (5)** y **(6)** se puede observar que corresponde a un sistema de ecuaciones diferenciales que está mejor representado por la siguiente Ecuación matricial.

4

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(P_1 + F_1) & F_1 \\ F_2 & -(P_2 + F_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} + T_p \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Donde las variables  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $P_1$  y  $P_2$  quedan representados por las ecuaciones siguientes:

$$F_1 = \frac{1}{(R_1 + R_2)(\rho_1 c_1 V_1)} \quad (8)$$

$$F_2 = \frac{1}{(R_1 + R_2)(\rho_2 c_2 V_2)} \quad (9)$$

$$P_1 = \frac{1}{R_u \rho_1 c_1 V_1} \quad (10)$$

$$P_2 = \frac{1}{R_u \rho_2 c_2 V_2} \quad (11)$$

Para encontrar la solución de la parte homogénea de la ecuación matricial se realizó el cálculo de los eigenvalores y los eigenvectores de la matriz de la **Ecuación (7)**. Posteriormente mediante el método de variación de parámetros se encontró la solución de la parte no homogénea. Y finalmente se aplicó la condición de frontera de que para  $t = 0$ ,  $T_1$  y  $T_2$  son iguales a  $T_i$ . La solución obtenida para la temperatura de cada viga corresponde a una función exponencial decreciente que se estabiliza en el valor de  $T_p$ .

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### ANÁLISIS DE LOS PARÁMETROS DE DISEÑO

El análisis se realizó con los parámetros de diseño presentados en la **Tabla 1**.

Con base en el modelo de la **Ecuación (4)** una manera de aumentar la deflexión de la viga es maximizando el factor que depende de los parámetros geométricos, dicho factor multiplica a la diferencia de temperatura. Para simplificar el análisis se propuso la razón  $f$ , mostrada en la **Ecuación (12)**.

$$f = \frac{h_2}{h_1} \quad (12)$$

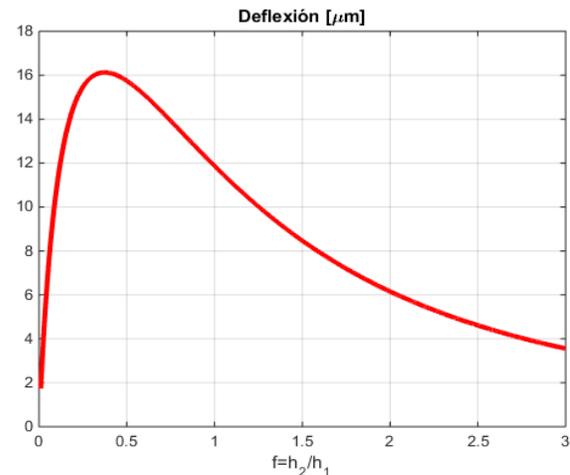
Realizando esa pequeña modificación y graficando la deflexión que tiene la viga en función de la relación  $f$ , se obtuvo la gráfica mostrada en la **Imagen 3**. Esta imagen muestra una distribución muy particular, se puede ver que la relación entre  $f$  y la deflexión de la viga no corresponde a un comportamiento lineal y que además existe un

valor particular de  $f$  donde se maximiza la deflexión de la viga.

**Tabla 1:** Parámetros de diseño utilizados para el análisis inicial.

Parámetros de diseño	Viga 1 (Au)	Viga 2 (Si)
$\alpha$	$14.3 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	$2.6 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
$\rho$	$19300 \text{ kg/m}^3$	$23300 \text{ kg/m}^3$
$k$	$317 \text{ W/mK}$	$148 \text{ W/mK}$
$c$	$129 \text{ J/kgK}$	$712 \text{ J/kgK}$
$h$	$1.8 \text{ } \mu\text{m}$	$4 \text{ } \mu\text{m}$
$b$	$80 \text{ } \mu\text{m}$	$100 \text{ } \mu\text{m}$
$E$	$80 \text{ GPa}$	$122 \text{ GPa}$
$L$	$500 \text{ } \mu\text{m}$	
$\lambda$	$2 \text{ } \mu\text{m}$	

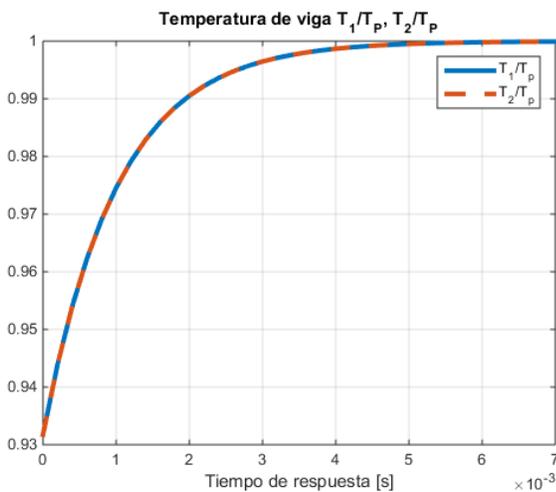
De acuerdo con los valores de  $h$  propuestos, **Tabla 1**, se tiene una relación  $f$  de 2.2. De la **Imagen 3**, se puede deducir que si se quiere optimizar la deflexión de la viga se debe cambiar los parámetros de la altura de cada una de las vigas. Se puede observar que el máximo se encuentra en el valor para la relación  $f$  de 0.35, por lo que se propone éste como valor óptimo.



**IMAGEN 3:** Deflexión de la viga en voladizo en el extremo de la misma.

## ANÁLISIS DEL TIEMPO DE RESPUESTA

Para el análisis térmico se hicieron los cálculos con una temperatura inicial del sistema  $T_i$  de 293 K, mientras que la temperatura  $T_P$  de la superficie  $P$  fue de 313 K. Se propuso la razón de la temperatura de viga sobre la temperatura de la superficie  $P$ , graficando esta razón de temperatura en función del tiempo se obtuvo la **Imagen 4**. Se puede notar que no existe diferencia considerable entre la temperatura de la viga superior y la temperatura de la viga inferior. Considerando un error del 1% con respecto a la temperatura  $T_P$ , se puede decir que la viga en voladizo alcanzó el estado estable en aproximadamente 2 ms, como se aprecia en la **Imagen 4**.



**IMAGEN 4:** Variación de la temperatura en función del tiempo.

## CONCLUSIONES

Con base en los resultados obtenidos se propone una modificación al modelo analizado. Con el propósito de conseguir un sistema con mayor sensibilidad se debe cumplir que la relación  $f$  sea lo más cercana posible a 0.35 y para ello se cambiará la altura de la viga superior al valor de 4  $\mu\text{m}$  y la viga inferior al valor de 1.4  $\mu\text{m}$ . Con dicha modificación el sensor de temperatura obtendrá el máximo desplazamiento y con ello una mayor sensibilidad. Lo anterior será posible siempre y cuando se mantengan las consideraciones iniciales de que la superficie  $P$  tenga una

temperatura mayor a la temperatura inicial de la viga.

Otra posible mejora que se puede realizar al modelo es disminuir la complejidad del mismo utilizando la consideración de que no existe gradiente de temperatura entre ambas vigas. Todo esto manteniendo los mismos materiales de fabricación. Lo anterior para que en lugar de obtener un sistema de ecuaciones diferenciales se obtenga una ecuación diferencial, y con ello obtener un modelo más simple y fácil de analizar.

## AGRADECIMIENTOS

En esta, mi primera participación en los veranos de investigación científica UG, quiero agradecer a la Universidad de Guanajuato por ofrecerme la oportunidad y apoyo para obtener esta grata experiencia. Además, quiero agradecer a mi asesor el Dr. Luz Antonio Aguilera Cortés por brindarme su ayuda y conocimientos.

## REFERENCIAS.

- [1] Khoshnoud, F., Llanos, W. de Silva, C. (2012). Recent Advances in MEMS Sensor: Technology-Mechanical Applications. IEEE Instrumentation & Measurement Magazine, 15(2), pp.14-24. Doi: 10.1109/MIM.2012.6174574
- [2] Kouravand, S., Rezazadeh, G., Tahnasebi, A., C. (2006). MEMS Capacitive Micro Thermometer Based on Tip Deflection of Bimetallic Cantilever Beam. Sensor & Transducer Journal, 70(8), pp.637-644.
- [3] Rezazadeh, G., Pashapour, M., C. (2007). Mechanical Behavior of a Thermal Micromirror based on a Bimetallic Cantilever Beam. Sensor & Transducer Journal, 84(10), pp.1641-1650.