



Modelo Matemático y Linealización de una Máquina de Inducción de Rotor Devanado

María Fernanda Cano Bañales
Alumna
AS15110010@tecabasolo.edu.mx

Rubén Alfredo Castro Rodríguez
Alumno
AS15110110@tecabasolo.edu.mx

José Francisco Ayala García
Docente Ingeniería en Sistemas Automotrices,
francisco.ayala@tecabasolo.edu.mx

Resumen

En este proyecto se presenta la obtención del modelo matemático y linealización de una Máquina de Inducción de Rotor Devanado (WRIM, por sus siglas en inglés), utilizando la técnica de linealización parcial por realimentación de variables de estado, donde la variable a controlar es la velocidad mecánica de la máquina, esta técnica se realiza a partir de las variables de estado obtenidas del modelo de la máquina de inducción. En la validación de la máquina de inducción y su sistema de linealización propuesto se utiliza el entorno de simulación de Simulink de Matlab.

Introducción

La linealización por realimentación es un método de diseño de sistemas de control no lineales, cuya idea principal es la de transformar, de manera parcial o total, la dinámica no lineal del sistema a controlar. En un sistema no lineal, las entradas se combinan entre sí y producen nuevos elementos en la salida que no estaban presentes en la entrada, a diferencia de un sistema lineal, donde las variables de salida son proporcionales a las de entrada, donde las variables de salida son proporcionales a las de entrada, por los fenómenos presentes en los sistemas no lineales surge el concepto de realimentación, que consiste en el proceso de medir las variables de interés en el sistema y usar esa información para controlar su comportamiento.



La técnica de linealización por realimentación de estados contempla dos métodos: la linealización entrada-estado y linealización entrada-salida, este último tipo es utilizado para linealizar la máquina de inducción, este método consiste en derivar repetidamente la variable de salida hasta que se logre establecer una relación lineal con la entrada (Khalil, 1996).

El documento está compuesto por diferentes secciones en las cuales se describe el modelo de la máquina de inducción, el diseño de la linealización realizada a la máquina, los resultados de las simulaciones realizadas y las conclusiones.

Objetivo

Obtener el modelo matemático expresado en variables de estado de la máquina de inducción, para aplicar la linealización por realimentación de estados y validar los modelos obtenidos mediante el software de simulación Simulink de Matlab.

Justificación

Con el modelo matemático de la máquina de inducción es posible conocer su comportamiento e identificar las variables que intervienen en la misma; la máquina de inducción de rotor devanado es un sistema no lineal variante en el tiempo, por lo cual no es posible aplicar una técnica de control clásico, debido a esta característica es necesario implementar una linealización parcial o total de las variables de la máquina.

Metodología

En la Figura 1 se muestra el circuito equivalente de WRIM. Las máquinas de inducción son variantes en el tiempo, por lo que para eliminar esta variación, se utiliza la Transformada de Park, realizando de esta manera una transformación de las variables de las 3 fases abc a coordenadas $dq0$.

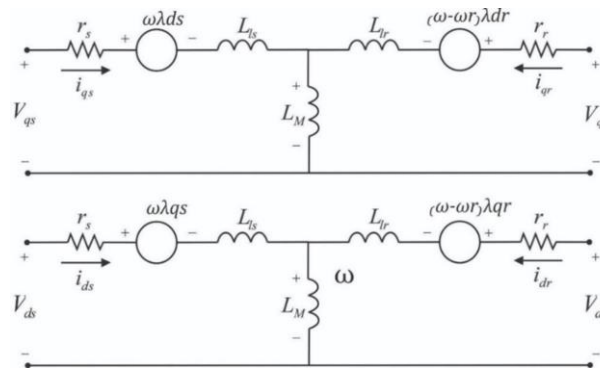


Figura 1. Circuito equivalente de la máquina de inducción en coordenadas $dq0$.

Las expresiones del voltaje de la máquina se obtienen mediante la ley de voltajes de Kirchhoff aplicado al circuito de la Figura 1 y las cuales se presentan en (1).

$$\begin{aligned}
 V_{qs} &= r_s i_{qs} + \omega \lambda_{ds} + \frac{d}{dt} \lambda_{qs} & V_{ds} &= r_s i_{qs} + \omega \lambda_{ds} + \frac{d}{dt} \lambda_{ds} \\
 V_{qr} &= r_r i_{qr} + (\omega - \omega_r) \lambda_{dr} + \frac{d}{dt} \lambda_{qr} & V_{dr} &= r_r i_{dr} - (\omega - \omega_r) \lambda_{qr} + \frac{d}{dt} \lambda_{dr}
 \end{aligned} \quad (1)$$

El subíndice r hace referencia a las variables y parámetros asociados con el rotor de la máquina y el subíndice s indica los parámetros y variables del estator.

Las variables asociadas en el eje de cuadratura están denotadas por el subíndice q , y las variables del eje directo están denotadas por el subíndice d . Las expresiones en (2) muestran los enlaces de flujo:

$$\lambda_{qs} = L_S i_{qs} + L_M i_{qr} \quad \lambda_{ds} = L_S i_{ds} + L_M i_{dr} \quad \lambda_{qr} = L_R i_{qr} + L_M i_{qs} \quad \lambda_{dr} = L_R i_{dr} + L_M i_{ds} \quad (2)$$

Al sustituir los enlaces de flujo de las expresiones anteriores, en las ecuaciones de voltaje de (1) y resolviendo de manera algebraica para obtener las corrientes en el estator y los enlaces de flujo del rotor de la máquina como variables de estado, se obtiene la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{qs} \\ \dot{i}_{ds} \\ \dot{\lambda}_{qr} \\ \dot{\lambda}_{dr} \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{\theta}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A i_{ds} - \omega i_{ds} + B \lambda_{qr} - C \omega_r \lambda_{dr} - C V_{qr} + V_{qs} / L_\sigma \\ \omega i_{qs} + A i_{ds} + C \omega_r \lambda_{qr} + B \lambda_{dr} - C V_{dr} + V_{ds} / L_\sigma \\ D i_{qs} - E \lambda_{qr} - (\omega - \omega_r) \lambda_{dr} + V_{qr} \\ D i_{ds} + (\omega - \omega_r) \lambda_{qr} - E \lambda_{dr} + V_{dr} \\ \frac{T_e - T_m}{J} \\ \omega_m \end{bmatrix} \quad (3)$$



El par electromecánico T_e está definido por la ecuación 4, donde P es número de pares de polos.

$$T_e = \frac{3P}{2} \frac{L_M}{L_R} (i_{qs} \lambda_{dr} - i_{ds} \lambda_{qr}) \quad (4)$$

La parte mecánica de la máquina se define con la velocidad (ω_m) y la posición (θ_m) del rotor.

Linealización parcial por realimentación de estados.

Un sistema no lineal de una entrada y una salida puede modelarse como la forma compacta mostrada en (5).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (5)$$

Donde x es el vector de estados, f y g son funciones vectoriales, $h(x)$ es la función escalar de salida y u es la entrada de control.

Para obtener la relación lineal se deriva la función de salida repetidas veces hasta encontrar una relación con la entrada. Se conoce como grado relativo r al número de veces que es necesario derivar $h(x)$, derivando esta variable se obtiene la expresión (6).

$$\dot{y} = L_f h(x) + L_g h(x)u \quad (6)$$

Donde los términos $L_f h(x)$ y $L_g h(x)$ corresponden a las derivadas de Lie de $h(x)$ con respecto a $f(x)$ y $g(x)$. De esta manera el gradiente de $h(x)$ está definido por la expresión (7).

$$\nabla h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} = \left[\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right] \quad (7)$$

Hasta que $L_g h(x) \neq 0$ el grado relativo será uno, de lo contrario es necesario seguir derivando. En (8) se muestra en forma matricial el sistema de ecuaciones diferenciales, por variables de estado.



$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Ax_1 - \omega x_2 + Bx_3 - C\omega_r x_4 - Cu_3 + \frac{u_1}{L_B} \\ -Ax_2 - \omega x_1 + Bx_4 - C\omega_r x_3 - Cu_4 + \frac{u_2}{L_B} \\ Dx_1 - Ex_3 - (\omega - \omega_r)x_4 + u_3 \\ Dx_2 - Ex_4 - (\omega - \omega_r)x_3 + u_4 \\ \frac{T_e}{J} \\ \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} u_5 \quad (8)$$

Si se define que la función escalar de salida $h(x) = x_5$, y se deriva como lo indica la expresión (9) respecto a cada estado, así el gradiente resulta de la siguiente manera:

$$\nabla h(x) = [0, 0, 0, 0, 1, 0] \quad (9)$$

Al multiplicar el vector de la expresión (9) por la matriz (8), se cumplirían la condición $L_g h(x) \neq 0$, de manera que las funciones vectoriales $f(x)$ y $g(x)$, resultarían las expresiones (10) y (11).

$$L_f h(x) = \frac{dh}{dx} f(x) = \nabla h(x) f(x) = \frac{T_e}{J} \quad (10)$$

$$L_g h(x) u = \nabla h(x) g(x) u = -\frac{u_5}{J} \quad (11)$$

De esta manera el resultado de las expresiones anteriores puede sustituirse en (12) obteniendo lo siguiente:

$$V = \dot{y} = \frac{T_e}{J} + \left(-\frac{u_5}{J} \right) \quad (12)$$

Donde v es una entrada al sistema o una señal de control y u_5 es la entrada de control, de esta manera en la ecuación (14) se muestra la función de linealización obtenida Lie y con la cual es posible obtener una respuesta lineal del sistema.

$$u_5 = T_e - JV \quad (13)$$

$$u_5 = \frac{3P}{2} \left(\frac{L_m}{L_r} \right) (x_1 x_4 - x_2 x_3) - JV \quad (14)$$



En la Figura 2 se muestra mediante un esquema simple el propósito de la linealización entrada-salida, se cuenta con un modelo no lineal (máquina de inducción) y una función de linealización (ecuación 14) cuyo objetivo es tener una relación lineal entre una nueva entrada propuesta “ v ” y la salida “ y ”.

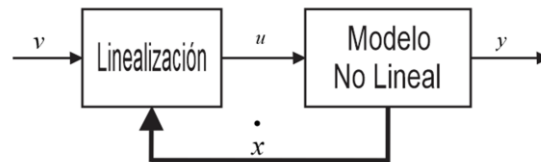


Figura 2. Esquema de linealización.

Resultados

Para la validación del sistema desarrollado de la máquina de inducción, en la Figura 3 se muestra su construcción con los bloques dispuestos en Simulink, por medio de estos bloques se representa el comportamiento dinámico del sistema, el cual cuenta con dos fuentes trifásicas, conectada al rotor y estator de la máquina, fuentes trifásicas y módulos para la medición de los voltajes.

Además, se agrega el subsistema para la linealización de la máquina, así como su modelado por medio de las ecuaciones resultantes del modelo matemático de la misma presentado en la ecuación 14, y en la Figura 4 se muestra la construcción del sistema de la máquina de inducción, pero representado por ecuaciones, el cual nos sirve para validar el modelo matemático obtenido de la máquina y compararlo con el sistema de bloques mostrado en la Figura 3.

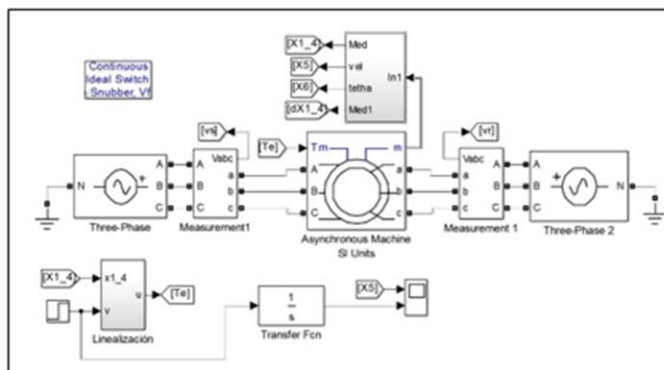


Figura 3. Modelo del WRIM creado en Simulink

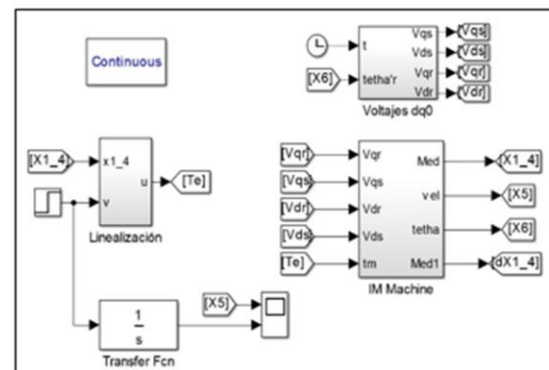


Figura 4. Modelo de la máquina creado por ecuaciones.

En las Figuras 5 y 6 se muestran las gráficas de las variables de estado tanto del modelo de bloques mostrado en la Figura 3 como del modelo de ecuaciones de la



correspondientes a la corriente del estator y al enlace de flujo del rotor, ambos en el eje de cuadratura en las cuales se puede observar que tienen un comportamiento similar.

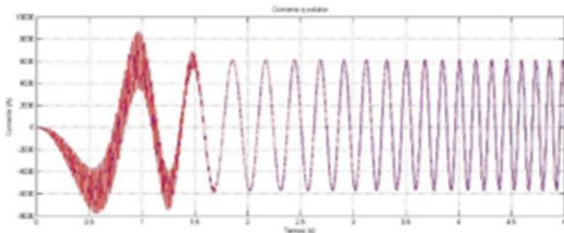


Figura 5. Modelo del WRIM creado en Simulink

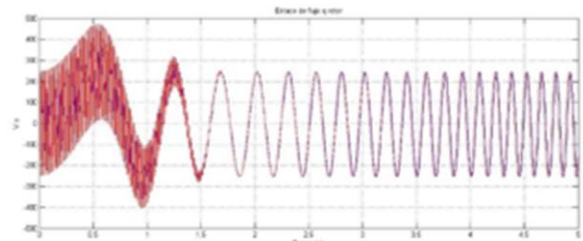


Figura 6. Modelo de la máquina creado por ecuaciones.

Para las variables de estado relacionadas con la parte mecánica de la máquina, tales como velocidad y posición angular se muestran en las Figuras 8 y 9, respectivamente, en estas figuras se grafica el comportamiento de los dos estados mencionados obtenidos del modelo de bloques y ecuaciones; es posible notar que, de manera similar a las corrientes y enlaces de flujo, su comportamiento tiene poca variación entre ellos, incluso para la velocidad la cual ya está linealizada.

Por su parte el par electromagnético perteneciente a la máquina se muestra en la Figura 10. Mientras que la Figura 11, muestra la validación del sistema; en dicha imagen se presenta la relación lineal que existe entre la entrada de propuesta en la función escalon y la salida elegida, en este caso la velocidad angular del rotor; validando así que el sistema puede representarse por una función de transferencia igual al grado relativo de la función de linealización.

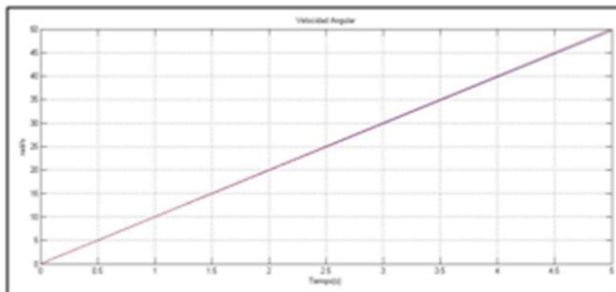


Figura 8. Velocidad angular.

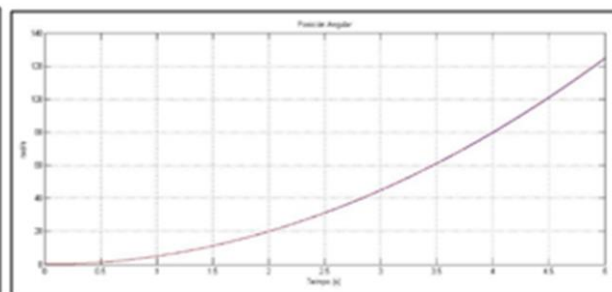


Figura 9. Posición angular.

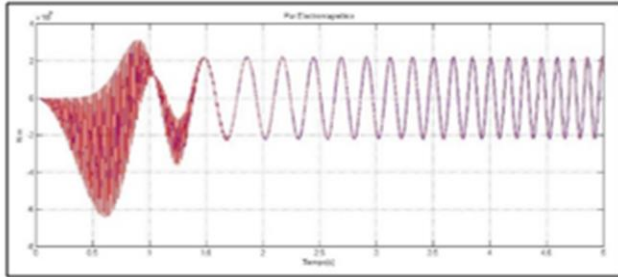


Figura 10. Par electromagnético.

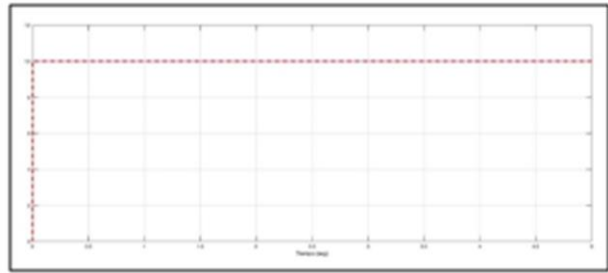


Figura 11. Señal de entrada.

Conclusión

Al analizar los resultados obtenidos del sistema de linealización parcial desarrollado para la máquina de inducción, se observa como la linealización ha reducido el sistema de la misma, al permitir representarlo todo como una función de transferencia de grado relativo igual a uno, el mismo grado que la función de linealización.

Es posible deducir que la ecuación de linealización correspondiente a la velocidad de la máquina se ha obtenido correctamente, en la Figura 6 se muestra como el comportamiento de este estado es lineal; además es posible observar que el método y modelo de linealización propuesto podría linealizar en forma total la máquina.

Referencias

- Krause, P., Wasynczuk, O., & Sudhoff, S. (2002). *Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*. New York: Wiley interscience.
- Khalil, H. (1996). *Nonlinear Systems* (Third ed.). (D. o. Engineering, Ed.) Prentice Hall.