



UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

CAMPUS IRAPUATO - SALAMANCA

DIVISIÓN DE INGENIERÍAS

“Optimización de un brazo robótico mediante estudio cinemático para la prevención de singularidades”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

Instrumentación y Sistemas Digitales

PRESENTA:

Ing. Guadalupe Jiménez Morales

DIRECTORES:

Dra. Ma. de Guadalupe García Hernández

Dr. Juan Gabriel Aviña Cervantes

Salamanca, Gto., a 11 de Mayo del 2018.

M. en I. HERIBERTO GUTIÉRREZ MARTÍN
JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR
PRESENTE.-

Por medio de la presente, se otorga autorización para proceder a los trámites de impresión, empastado de tesis y titulación al alumno(a) Guadalupe Jiménez Morales del **Programa de Maestría en Ingeniería Eléctrica (Instrumentación y Sistemas Digitales)** y cuyo número de **NUA** es: 144973 del cual soy director. El título de la tesis es: Optimización de un brazo robótico mediante estudio cinemático para la prevención de singularidades

Hago constar que he revisado dicho trabajo y he tenido comunicación con los sinodales asignados para la revisión de la tesis, por lo que no hay impedimento alguno para fijar la fecha de examen de titulación.

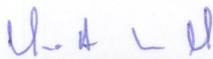


Dr. Juan Gabriel Aviña Cervantes
NOMBRE Y FIRMA
DIRECTOR DE TESIS
SECRETARIO

ATENTAMENTE



Dra. Ma. de Guadalupe García Hernández
NOMBRE Y FIRMA
DIRECTOR DE TESIS



Dr. Mario Alberto Ibarra Manzano
NOMBRE Y FIRMA
PRESIDENTE



Dr. Juan Manuel Sierra Hernández
NOMBRE Y FIRMA
VOCAL

Dedicatoria

A Dios que me permitió vivir cada día y concluir esta etapa de mi vida.

A mis padres, hermanos y sobrinos que me encantaría ver con mayor frecuencia, ya que ellos son parte fundamental para mí, es importante saber por qué vale la pena luchar.

A Jesús a Nico y a Laika, que siempre están conmigo, llenándome de alegría y motivación para ser mejor persona.

A mis abuelitos que están en el cielo, y que estoy segura guían mis pasos y siempre me acompañan.

A todas las personas que me han apoyado en estos años, que me enseñaron la importancia del orden, detalles y que siempre me acompañan hasta hoy. Les dedico el resultado de su presencia en mi vida.

A mis directores de tesis, que me alentaron a seguir adelante y hacer las cosas bien.

Agradecimientos

A Dios, por hacerme entender que todo en la vida tiene una razón de ser, por guiar mis pasos y proteger a las personas que quiero con el corazón.

A mis padres, que me han cuidado, protegido y alentado a seguir adelante en las metas que me propongo, y a enseñarme a ser una buena mujer y estar conmigo a llegar a la meta.

Al CONACyT que fue parte esencial para poder realizar mis estudios de maestría.

A mis directores de tesis, que me han apoyado siempre con su experiencia y conocimientos para la realización y redacción de este proyecto.

A mis compañeros de maestría Jesús y Antonio, que me han apoyado y animado a continuar durante el transcurso de este proyecto, ha sido una alegría el poder disfrutar de su compañía.

Índice general

Resumen	VI
Índice de figuras	VII
Índice de tablas	VIII
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	2
1.2. Problemática	3
1.3. Justificación	3
1.4. Objetivos	4
1.4.1. Objetivo general	4
1.4.2. Objetivos específicos	4
1.5. Organización de la tesis	4
2. Consideraciones teóricas	5
2.1. Características geométricas y funcionales de un robot	5
2.2. Posición y orientación de un robot	6
2.2.1. En el espacio bidimensional	6
2.2.2. Análisis en el espacio tridimensional	8

2.2.3.	Aplicación de matrices homogéneas	11
2.2.4.	Transformaciones compuestas	12
2.2.5.	Algoritmo Denavit-Hartenberg (Modelo estándar)	13
2.3.	Cinemática de un robot manipulador	14
2.3.1.	Ingeniería inversa, morfogénesis e ingeniería concurrente	15
2.3.2.	Modelado y análisis de la posición de un robot	15
2.4.	Análisis de la Cinemática de un robot manipulador	16
2.4.1.	Análisis de la Cinemática directa	16
2.4.2.	Análisis de la Cinemática inversa	17
2.5.	Métodos de optimización en Ingeniería	17
2.5.1.	Métodos de optimización mono-objetivo	18
2.5.2.	Métodos de optimización multi-objetivo	18
2.6.	Robots hiper-redundantes	19
2.6.1.	Eslabones y articulaciones	20
2.6.2.	Tipos de articulaciones	20
2.6.3.	Grados de libertad	20
3.	Propuesta	23
3.1.	Análisis cinemático del brazo robótico FANUC200ib	23
3.1.1.	Parámetros y representación de Denavit y Hartenberg	24
3.1.2.	Análisis de posición directo del brazo robótico	26
3.1.3.	Análisis de posición inverso del brazo robótico	26
3.2.	Definición del espacio de trabajo del brazo robótico	28
3.3.	Definición y cálculo de la matriz Jacobiana para la posición del brazo	28
3.4.	Singularidades en el movimiento del brazo robótico	29

3.4.1. Definición y clasificación de singularidades	30
3.4.2. Singularidades de contorno	30
3.4.3. Singularidades internas	30
3.4.4. Desacoplo de singularidades	30
3.4.5. Relaciones diferenciales	30
3.5. Análisis cinemático propuesto	31
3.5.1. Matriz de transformación T	32
3.5.2. Posición y orientación del brazo	34
3.5.3. Análisis cinemático inverso	34
3.6. Técnicas de optimización aplicado a los eslabones del brazo articulado	42
3.7. Análisis de método exhaustivo para la optimiazzción del brazo robótico	42
3.8. Gráficas resultantes de los cálculos obtenidos en el brazo robótico	46
3.8.1. Gráficas de resultados de los ángulos codo-abajo y codo-arriba.	46
3.8.2. Gráficas de resultados de cálculos en MatLab	47
3.8.3. Resultados con los métodos de optimización del tiempo de respuesta del brazo robótico	49
4. Conclusiones	59
4.1. Alcance de objetivos de este trabajo de tesis	59
4.1.1. Matriz de transformación homogénea total	60
4.1.2. Puntos singulares	60
4.1.3. Error existente entre cada movimiento de los eslabones	62
4.1.4. Consideraciones finales	62
Bibliografía	63

Resumen

En esta tesis se presenta el análisis cinemático del movimiento tridimensional de los eslabones de un brazo articulado, empleando para su estudio métodos de optimización. Con este análisis se propone evitar que se presenten singularidades (puntos no alcanzables) en la operación del brazo robótico FANUC200ib. Para ello se estudian y se prueban diversos métodos de optimización en los movimientos del brazo robótico. El campo de aplicación de este tipo de brazos robóticos se encuentra en el área de investigación científica y tecnológica, así mismo para su aplicación industrial, puesto que se requiere que estos tengan movimientos precisos para el manejo de piezas pequeñas. Con la aplicación de éstos métodos de optimización se eliminan las singularidades, obteniendo de esta forma el movimiento óptimo del brazo.

Índice de figuras

2.1. Vector de coordenadas P, en el plano x-y	7
2.2. Localización de un punto en posición y orientación	7
2.3. Traslación de un sistema de coordenadas	8
2.4. Posición en el espacio	9
2.5. Posición y orientación en el espacio	10
2.6. Parámetros D-H para un eslabón	14
2.7. Diagrama del manipulador incluyendo un sistema coordinado fijo a la base. .	16
2.8. Cinemática directa e inversa	17
2.9. Robot con seis grados de libertad	19
2.10. Cadenas cinemáticas	20
2.11. Grados de libertad	21
3.1. Relación entre los análisis de posición directo e inverso.	25
3.2. Variante próxima de la notación de Denavit y Hartenberg.	25
3.3. Método para obtener la relación entre velocidades.	31
3.4. Posición del centro de la muñeca esférica.	36
3.5. Vectores para el cálculo de θ_2 y θ_3	37
3.6. Soluciones para θ_2 y θ_3 para cuando θ_1 está en el primer cuadrante.	38
3.7. Soluciones para θ_2 y θ_3 para cuando θ_1 está en el tercer cuadrante.	38

3.8. Ejemplo de aplicación de un método de optimización, identificando la región factible.	43
3.9. Comprobación de las soluciones para el ángulo θ_{1a}	47
3.10. Comprobación de la no existente solución para el ángulo θ_{1b}	47
3.11. Matriz de transformación calculada mediante MatLab.	49
3.12. Resultados numéricos (a)	50
3.13. Resultados numéricos (b)	51
3.14. Resultados numéricos (c)	52
3.15. Resultados numéricos (d)	53
3.16. Ángulos singulares obtenidos.	54
3.17. Minimización de error (a).	55
3.18. Minimización de error (b).	56
3.19. Minimización de error (c).	57
3.20. Minimización de error (d).	58
4.1. Ángulos singulares obtenidos.	61

Índice de tablas

2.1. Tipos de articulaciones	20
3.1. Parámetros de Denavit-Hartenberg para un manipulador FANUC200ib empleando la variante próxima	26
3.2. Valores de ángulos mediante el análisis de posición inverso.	27
3.3. Parámetros Denavit-Hartenberg para el mecanismo esférico de cuatro barras.	27
3.4. Parámetros Denavit-Hartenberg inicial y final para el mecanismo de cuatro barras	41

page

Capítulo 1

Introducción

Actualmente la Robótica juega un importante papel en el proceso de modernización e innovación del sector industrial, coadyuvando a mejorar la calidad del producto, así como la productividad. Los manipuladores o brazos robóticos han ayudado a sustituir al ser humano en aquellos procesos que resultan repetitivos o que se desarrollan en ambientes peligrosos, o también en aquellos trabajos en los que el ser humano no es capaz de realizar por su alta complejidad, como en la industria automotriz, en los que se requiere levantar piezas muy pesadas. Por lo anteriormente expuesto, en esta tesis se presenta el análisis cinemático de un brazo robótico así como su optimización, con el fin de evitar la presencia de singularidades al momento de su manipulación, ya que es muy importante que un robot trabaje en su espacio de trabajo considerando las limitaciones mecánicas al movimiento del brazo, es decir, los puntos no alcanzables de acuerdo con la posición del brazo robótico.

Se entiende por *visual servoing* (VS) o control visual al uso de visión por computadora para el control del movimiento de un robot. Los sistemas de VS se clasifican de acuerdo con tres criterios: la configuración física del sistema de visión, la utilización de las características extraídas de la imagen y la arquitectura del robot [1].

Con la realización de este proyecto de tesis se pretende desarrollar un estudio de la cinemática y aplicación de métodos en un brazo robótico con seis grados de libertad con el que se busca evitar la presencia de singularidades al momento de la manipulación visual de objetos.

Cabe indicar que, para el buen desarrollo de esta tesis, se hará uso de técnicas de diferentes campos de estudio, como son el procesamiento de imágenes, la teoría de control y la cinemática.

1.1. Antecedentes

Según la Real Academia Española, se define *robot* como “máquina o ingenio electrónico programable, capaz de manipular objetos y realizar operaciones antes reservadas solo a las personas”. Una segunda definición explica que un “robot se define como una entidad hecha por el hombre con un cuerpo (anatomía) y una conexión de retroalimentación inteligente, en el sentido y la acción, no bajo la acción directa del control humano. Sin embargo, se ha avanzado mucho en el campo de los robots con inteligencia artificial. Las acciones de este tipo de robots son generalmente llevadas a cabo por motores o actuadores que mueven extremidades o impulsan al robot. Así mismo, el término robot ha sido utilizado como un término general que define a una máquina mecánica o autómeta, que imita a un animal, ya sea real o imaginario, pero se ha venido aplicando a muchas máquinas que remplazan directamente a un humano o animal en el trabajo o el juego. Esta definición podría implicar que un robot es una forma de biomimetismo¹”.

La Robótica es la ciencia y la tecnología de los robots. Se ocupa del diseño, manufactura y aplicaciones de los robots. La robótica combina disciplinas tales como: la mecánica, la electrónica, la informática, la inteligencia artificial y la ingeniería de control. Otras áreas importantes en robótica son el álgebra, los autómetas programables y las máquinas de estados.

Un *robot* es un dispositivo electrónico y generalmente mecánico que desempeña tareas automáticamente, ya sea por medio de supervisión humana directa o a través de un programa predefinido o siguiendo un conjunto de reglas generales.

Por otro lado, los brazos robóticos han tratado de asemejar el movimiento del brazo humano, por lo que se han construido emulando las articulaciones de estos. Las articulaciones de un brazo robótico suelen moverse mediante motores eléctricos o dispositivos neumáticos. En la mayoría de los robots, la pinza se mueve de posición cambiando su orientación. Para ello una computadora calcula los ángulos de las articulaciones necesarios para llevar la pinza a la posición deseada, este es un proceso conocido como cinemática inversa. Este estudio obtiene mediante procesos matemáticos como fórmulas, leyes o teoremas, las diferentes posiciones que pueden tener las articulaciones de un brazo mecánico.

Cabe señalar que, algunos brazos multiarticulados están equipados con servo controladores, o controladores por realimentación, que reciben datos de una computadora. Cada articulación del brazo tiene un dispositivo que mide su ángulo y envía ese dato

¹Biomimetismo: Disciplina que trata de buscar soluciones tecnológicas inspiradas en los diseños de la naturaleza.

al controlador. Si el ángulo real del brazo no es igual al ángulo calculado para la posición deseada, el servo controlador mueve la articulación hasta que el ángulo del brazo coincida con el ángulo calculado. Los controladores y las computadoras asociados también deben procesar los datos recogidos por cámaras que localizan los objetos que se van tomar o la información de sensores situados en las pinzas que regulan la fuerza de agarre.

Por último, existen configuraciones de los robots para las cuales el robot no tiene libertad de realizar tareas arbitrarias, a estas posiciones se les da el nombre de posiciones singulares o singularidades. Estas son configuraciones que puede adoptar un robot, pero en cuyo caso las fuerzas articulares no pueden equilibrar fuerzas arbitrarias sobre el actuador final, por lo que en estas posiciones la calidad de la operación del robot se deteriora.

1.2. Problemática

En esta tesis se presenta el análisis cinemático del movimiento de un brazo robótico, sin considerar las fuerzas en juego, sólo los elementos dinámicos como son: posición, velocidad y aceleración, con el objeto de evitar singularidades en la locomoción de un brazo articulado. La matemática desarrollada deberá ser capaz de comparar las características que tiene en funcionamiento el brazo, comparando la posición del objeto con la posición deseada y generando un cambio de posición en el brazo robótico para lograr que el error existente entre ambas posiciones sea nulo.

1.3. Justificación

Actualmente los sistemas robóticos son controlados por sensores visuales y la importancia de estudiar la cinemática habida en el brazo robótico FANUC200ib, ubicado en el Laboratorio de Robótica móvil de la Universidad de Guanajuato, se basa principalmente en analizar los movimientos que éste tiene y evitar que tenga singularidades al momento de sujetar y levantar una pieza en el lugar donde este se encuentre. Así mismo, se delimita el área de trabajo, obteniendo los ángulos o puntos en el espacio que no son alcanzables de acuerdo al diseño del brazo, todo esto mediante técnicas de la Ingeniería.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Desarrollar el análisis cinemático de un brazo robótico articulado para evitar que se presenten singularidades durante la manipulación de objetos. Esto mediante el cálculo de sus movimientos y la optimización de su locomoción para el buen funcionamiento del brazo.

1.4.2. Objetivos específicos

1. Analizar cinemáticamente los movimientos del brazo robótico.
2. Realizar ajuste matemático de los grados de libertad del movimiento del FANUC200ib, para evitar singularidades.
3. Experimentar con el brazo robótico FANUC200ib para medir sus movimientos de acuerdo con las funciones programadas en MatLab.

1.5. Organización de la tesis

Para alcanzar el objetivo general, esta tesis se organiza de la siguiente manera:

En el **capítulo 2** se presentan las consideraciones teóricas para la solución de la problemática . En el **capítulo 3** se muestra el análisis cinemático sobre los movimientos óptimos del brazo FANUC200ib, así como la optimización de dicho estudio para evitar singularidades. En el **capítulo 4** se presentan los resultados experimentalmente obtenidos para el citado brazo articulado. Finalmente se presentan las conclusiones.

Capítulo 2

Consideraciones teóricas

En este capítulo se desarrollan las bases teóricas con las cuales se sustenta el análisis cinemático y la optimización en el movimiento de brazo robótico FANUC-200ib, que es el objetivo del trabajo de tesis. Este capítulo consta de varios subtemas en los que se describen los tipos de eslabones y articulaciones, las características geométricas y funcionales en un robot, la definición del análisis de la cinemática, la importancia de analizar la posición y orientación de un brazo robótico y por último, los métodos de optimización.

2.1. Características geométricas y funcionales de un robot

Los robots presentan una serie de características interesantes para su comprensión y desarrollo dentro del campo investigativo; por un lado está la configuración básica de la que está constituido el robot, por otra parte se tiene las diferentes categorías y clasificaciones que tienen los robots y por último y no menos importante, las aplicaciones industriales que presenta cada tipo de robot.

Los robots industriales principalmente cuentan con mecanismos que les permiten realizar las tareas para las que fueron diseñados. Sin embargo, todos los robots cuentan con una configuración básica, la cual cuenta con:

- Estructura: compuesta por los diferentes eslabones y pares cinemáticos que le dan cuerpo al robot, por lo general la estructura esta conformada por los siguientes elementos:
- Cintura (*armsweep*): También conocida como base del robot, permite una movilidad parecida a la cintura debido a lo que gira en un plano horizontal.

- Hombro (*shoulder*): Elemento intermedio que permite la movilidad en un plano perpendicular (en la mayoría de los casos) al plano ahorizontal, su objetivo es el desplazar el brazo para que alcance la posición deseada.
- Codo (*elbow*): Es el par cinemático encargado de mover al elemento final para que alcance la posición deseada, su plano de giro es variante.
- Muñeca: Comúnmente usada en aplicaciones de la industria textil, suelen tener 3 articulaciones usadas en su movimiento que se denominan, balanceo, cabeceo y guiñada.
- Elemento terminal: Es parte primordial del robot.

2.2. Posición y orientación de un robot

En robótica es de vital importancia el representar adecuadamente posiciones y orientaciones en el plano espacial. Este interés es evidente en vehículos autónomos aéreos o submarinos.

Es importante mostrar el avance del robot durante su desarrollo para así demarcar las posiciones que este va ocupando a través del tiempo y así poder estimar y determinar su trayectoria y posición final.

2.2.1. En el espacio bidimensional

Como introducción al movimiento espacial de los robots, las consideraciones geométricas que se realizan para el estudio de la cinemática de los robots y su análisis matricial, establecen que se necesita dos sistemas de coordenadas y un ángulo de orientación.

Se supone un sistema de coordenadas de referencia fijo al que se designa como sistema $[A]$. La posición de un punto se representa mediante el vector posición ${}^A\mathbf{P}$, como se muestra en la figura anterior (Ver figura 2.1) cuyas componentes son las coordenadas:

$${}^A\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Considere otro sistema en el cual se trata de localizar a un robot móvil que se ha desplazado en el plano, un segundo sistema se colocará de tal forma que sea solidario con el robot P_x en la orientación del robot.[12]

Si se expresa los vectores unitarios de los dos sistemas de coordenadas, $[A]$ y $[B]$, por lo que se los escribirá de acuerdo a la siguiente disposición matricial:

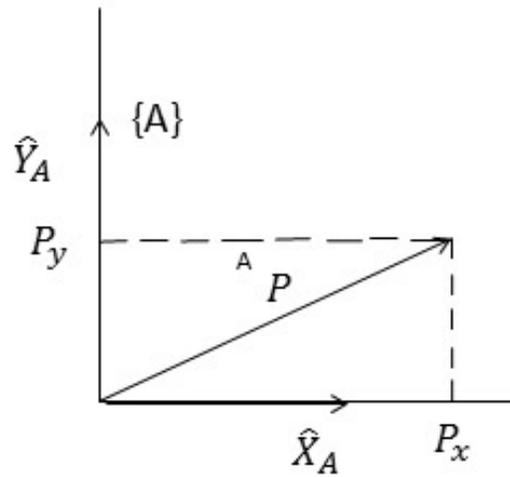


Figura 2.1: Vector de coordenadas P , en el plano x - y

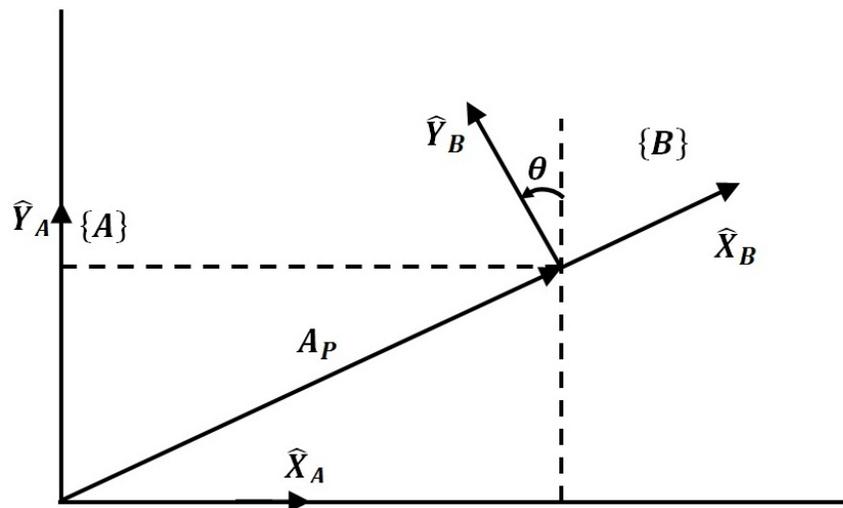


Figura 2.2: Localización de un punto en posición y orientación

$${}^B R_A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Lo cual se conoce como *matriz de rotación*, que son de vital importancia en modelos empleados en la robótica convencional.

Ahora suponer un sistema $[B]$ diferente del anterior, el cual tiene sus vectores

unitarios coincidentes y en la misma dirección con los del vector [A], como se muestra en la figura 2.3; en este particular problema se presenta el movimiento que realizaría un robot que se ha desplazado sin cambiar de orientación. El origen del sistema [B] se encuentra desplazado con respecto a sistema de coordenadas [A] mediante el vector ${}^A P_{ORGB}$.

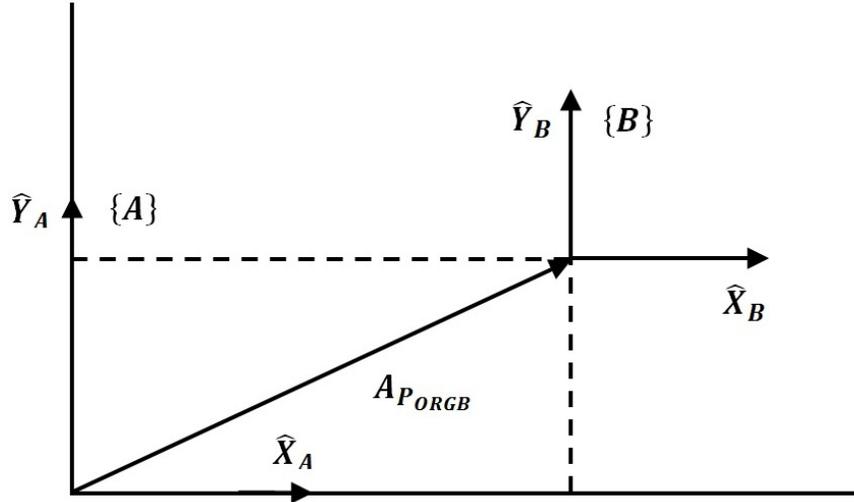


Figura 2.3: *Traslación de un sistema de coordenadas*

Por consiguiente, las coordenadas de cualquier punto del plano en los dos sistemas de coordenadas están relacionados mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} {}^A P_x &= {}^B P_x + {}^A P_{xORGB} \\ {}^A P_y &= {}^B P_y + {}^A P_{yORGB} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Los componentes de los vectores de estas expresiones, pueden sumarse por estar estos vectores en la misma dirección.

2.2.2. Análisis en el espacio tridimensional

Dado que los robots industriales, se mueven en un espacio de tres dimensiones, se dice que este movimiento lo realizan en el espacio por lo que obtenemos diferentes expresiones para modelar matemáticamente la cinemática del robot.

Ahora, partiendo de un vector ${}^A P$ que parte de un sistema de coordenadas [A], tal como se muestra en la figura 2.3, en el cual se describe la siguiente expresión:

$${}^A P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

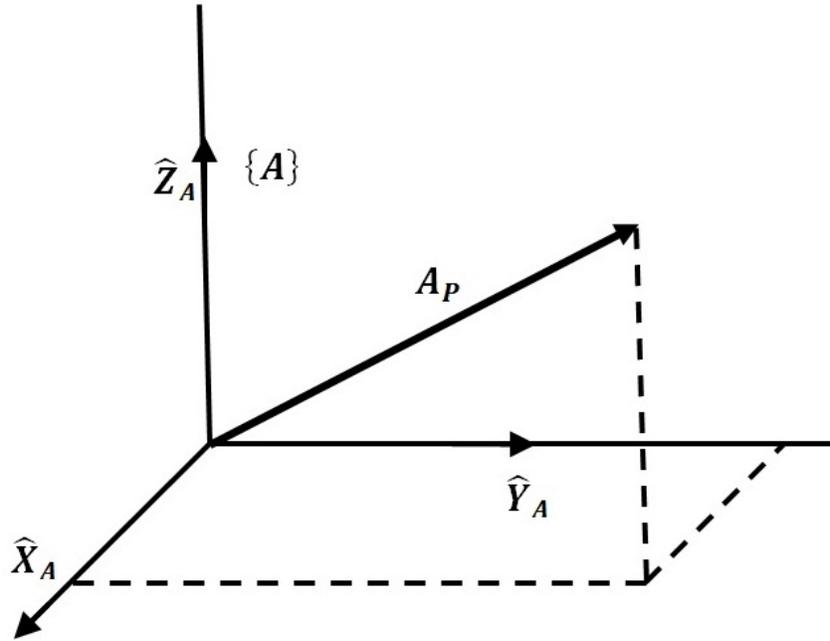


Figura 2.4: Posición en el espacio

Donde P_x, P_y, P_z son las coordenadas del punto extremo del vector ${}^A P$; para el análisis espacial de los robots, es común el uso de los desarrollos de Craig [13]. Los cuales muestran que la orientación de un cuerpo se describe mediante el sistema de coordenadas B solidario al cuerpo. Si se desea representar la orientación con respecto al sistema de coordenadas A.

Haciendo así, que se forme mediante cuatro vectores de tres elementos, la matriz de rotación ${}^A R_B$ del sistema B la cual se mueve respecto al sistema de coordenadas A como se muestra en la figura 2.5.

En la mayor parte de la robótica es necesario realizar cambios entre sistemas de referencia de los eslabones en el espacio. Así, en robots convencionales como los manipuladores, los modelos en los que se basan, involucran cambios entre sistemas asociados a las diferentes articulaciones de la cadena cinemática para describir la posición y orientación del extremos del manipulador con respecto a su eslabón base.

Como se dijo anteriormente, las transformaciones consisten esencialmente de traslaciones y rotaciones de los sistemas de coordenadas móviles por lo que para este caso la traslación se puede expresar abiertamente según la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 {}^A \vec{P}_x &= {}^B \vec{P}_x + {}^A \vec{P}_{xORGB} \\
 {}^A \vec{P}_y &= {}^B \vec{P}_y + {}^A \vec{P}_{yORGB} \\
 {}^A \vec{P}_z &= {}^B \vec{P}_z + {}^A \vec{P}_{zORGB}
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

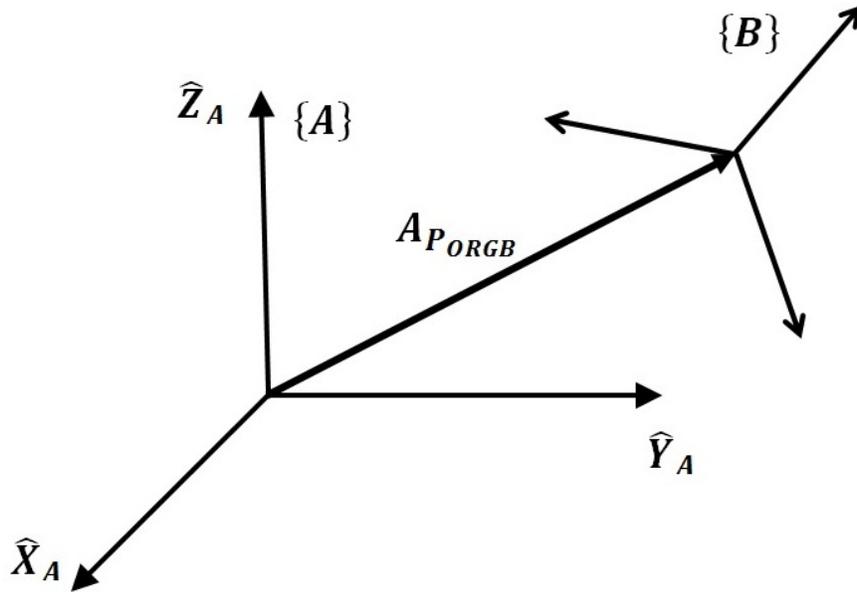


Figura 2.5: Posición y orientación en el espacio

Donde ${}^A\vec{P}_x, {}^A\vec{P}_y, {}^A\vec{P}_z$ son las coordenadas del sistema de referencia [A]. Siendo esta una operación matricial, utilizando las expresiones de rotación y traslación, se la puede interpretar mediante operadores [13]. Así el operador P para el sistema de coordenadas [B] respecto al sistema de referencia [A] queda de la siguiente manera:

$$T_{p_A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Como caso particular, a partir de la matriz de rotación en el espacio, se define una orientación del sistema que permite representar la orientación de sistemas girados únicamente sobre uno de los ejes principales del sistema de referencia, se expresa la siguiente expresión homogénea:

$$R = \begin{bmatrix} i_x i_u & i_x j_v & i_x k_w \\ j_y i_u & j_y j_v & j_y k_w \\ k_z i_u & k_z j_v & k_z k_w \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Por lo que para cada eje de rotación del sistema de coordenadas se obtiene:

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$R_{x,\phi} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \text{sen}\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

2.2.3. Aplicación de matrices homogéneas

Para el correcto análisis de las matrices y su posterior multiplicación matricial, es necesario la transformación de perspectiva nula y escalado global unitario para homogeneizar la matriz; la matriz T homogénea resultará ser de la siguiente forma:

$$T = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & R_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotacion} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Por lo que aplicando este criterio a las matrices de rotación anterior se obtiene:

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 \\ 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$R_{x,\phi} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \text{sen}\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Es importante recalcar que en la robótica convencional sólo hay rotación alrededor del eje $Z(\theta)$ y el eje $X(\alpha)$ como se explica más adelante en el apartado del convenio de Denavit-Hartenberg. También es vital señalar que las matrices R de este segmento, son matrices normalizadas para su posterior aplicación.

2.2.4. Transformaciones compuestas

Muchos de los problemas de la robótica, involucran innecesariamente una serie de transformaciones compuestas que se generan a partir de varias operaciones elementales de traslación y rotación de los diferentes eslabones del robot analizado.

Por lo que se infiere, que para lograr conocer la posición exacta en la que se encuentra el extremo último del robot, es necesario estudiar la transformación compuesta que relaciona este último extremo, con el sistema de coordenadas tomado de referencia absoluta para el robot, el cual se encuentra en la base del robot manipulador.

Por lo que si tenemos, por ejemplo, una traslación y una posterior rotación, la matriz resultante del producto matricial entre la matriz de traslación y la rotación, nos dará como resultado, una matriz que permita encontrar transformar las coordenadas del último punto del robot, respecto al sistema de coordenadas de referencia.

Dado que un robot, es considerado como una cadena cinemática que cuenta con eslabones y pares cinemáticos; se puede establecer un sistema de referencia fijo a la base del robot a partir del cual se puede caracterizar cada elemento del robot respecto a dicho sistema de referencia.

La matriz de transformación homogénea que representa la posición y orientación del sistema asociado a dos eslabones contiguos del robot, se denomina matriz ${}^{i-1}T_i$ con i desde uno hasta el k -ésimo eslabón, de forma tal que se pueda representar toda la cadena cinemática del robot.

Cada una de las matrices ${}^{i-1}T_i$, representa el cambio base que permite pasar de un sistema asociado al eslabón $i - 1$ asociado al eslabón i . Esta matriz dependerá de otras constantes geométricas del robot y de sus grados de libertad. En términos generales para n eslabones la expresión quedaría: [11]

$$T_{q_1 \dots q_n} = {}^0T_n = {}^0T_1(q_1), {}^1T_2(q_2), {}^2T_3(q_3) \dots {}^{n-1}T_n(q_n) \quad (2.15)$$

Por lo que para un robot con seis grados de libertad como el de este proyecto, la matriz T estará expresada de la siguiente manera:

$$T = {}^0T_6 = {}^0T_1, {}^1T_2, {}^2T_3, {}^3T_4, {}^4T_5, {}^5T_6 \quad (2.16)$$

El modelado y control de robot hace necesario el considerar las diferentes posiciones y orientaciones que tiene el robot en el espacio.

2.2.5. Algoritmo Denavit-Hartenberg (Modelo estándar)

En la década de los 50, durante el año de 1955 Denavit y Hartenberg, propusieron un método muy sistemático para descubrir y presentar la geometría espacial de los diferentes elementos de la cadena cinemática, particularmente orientada hacia los robots, con respecto a un sistema de coordenadas fijo.

Ese algoritmo logró reducir el problema cinemático a solo encontrar una matriz de transformación homogénea 4×4 , la cual relaciona la localización espacial del robot respecto al sistema de coordenadas en la base.

Obtención del modelo cinemático directo

Este innovador sistema, establece la localización que debería tomar cada sistema de coordenadas [Si], que se encuentre ligado a un eslabón i de una cadena articulada para poder sistematizar de manera sencilla la obtención de las diferentes ecuaciones cinemáticas que conforman la cadena completa. [11]

Poniendo en práctica lo mencionado, se podrá pasar de un eslabón al siguiente mediante cuatro transformaciones básicas que dependen únicamente de las características físicas-geométricas del eslabón.

Las cuatro transformaciones, parten del hecho de colocar adecuadamente el sistema de coordenadas de cada eslabón, permitiendo así reducir de seis a cuatro los grados de libertad que comúnmente se encuentran y que dependen de la geometría del eslabón a analizar. Estas cuatro transformaciones son una sucesión de rotaciones y traslaciones en el orden en el que se ha movido el robot y que permite relacionar el sistema de referencia del eslabón $i - 1$ con el siguiente sistema de referencia del eslabón i , esto se puede apreciar mejor en la siguiente figura 2.6

Estas transformaciones son:

1. Rotación alrededor del eje z_{i-1} un ángulo de θ_i
2. Traslación a lo largo de z_{i-1} , una distancia de d_i ; vector $d_1(0, 0, d_i)$

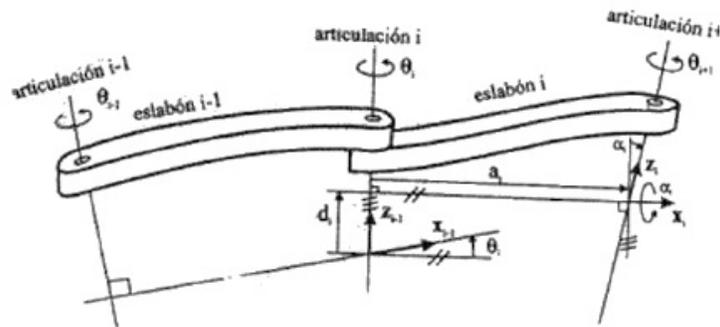


Figura 2.6: Parámetros D-H para un eslabón

3. Traslación a lo largo de x_{i-1} , una distancia de a_i ; vector $a_i(a_i, 0, 0)$
4. Rotación alrededor del eje x_i con un ángulo de α_i

Es importante remarcar el hecho de que el paso al sistema de referencia $i - 1$ al sistema i se cumple, si y solo si, se realizan adecuadamente los pasos establecidos por Denavit-Hartenberg para su modelo matemático.

2.3. Cinemática de un robot manipulador

La cinemática es una parte de la Física que estudia el movimiento en el espacio y tiempo. La cinemática del brazo del robot es interesante por la descripción analítica del desplazamiento espacial del robot como una función del tiempo, en particular de las relaciones entre la posición de las variables de articulación, y la posición y orientación del actuador final del brazo del robot.

En la cinemática del robot existen dos factores importantes: Dado un vector de ángulos de las articulaciones y los parámetros geométricos del elemento (dimensiones de las articulaciones) y si se tiene los ángulos de las articulaciones, entonces:

$$Q_t = (Q1_{(t)} + Q2_{(t)} + Q3_{(t)}) * T \quad (2.17)$$

Donde T es el número de ejes del brazo del robot, para plantear la ecuación se debe averiguar la coordenada (x, y, z) en la que se encuentra el actuador final.

Dada una posición y orientación deseada del actuador final del manipulador y los parámetros geométricos de los elementos con respecto a un sistema de coordenadas de referencia, es decir dada la coordenada (x, y, z) en la cual se desea colocar al efector

final de un brazo robótico de T ejes (Ver ecuación 2.17), se deben obtener los ángulos de articulación correspondientes del robot de manera que se puedan posicionar como se desea el efecto final.

2.3.1. Ingeniería inversa, morfogénesis e ingeniería concurrente

El objetivo de la ingeniería inversa es obtener información o un diseño a partir de un producto accesible al público, con el fin de determinar de qué está hecho, qué lo hace funcionar y cómo fue fabricado.

Hoy en día los productos más comúnmente sometidos a ingeniería inversa son los programas de computadoras y también los componentes electrónicos pero en realidad, cualquier producto puede ser objeto de un análisis de ingeniería inversa.

El método se denomina así porque avanza en dirección opuesta a las tareas habituales de ingeniería, que consisten en utilizar datos técnicos para elaborar un producto determinado. En general, si el producto u otro material que fue sometido a la ingeniería inversa fueron obtenidos en forma apropiada, entonces el proceso es legítimo y legal. De la misma forma, pueden fabricarse y distribuirse legalmente los productos genéricos creados a partir de la información obtenida de la ingeniería inversa, como es el caso de algunos proyectos de *software* libre ampliamente conocidos.[10]

2.3.2. Modelado y análisis de la posición de un robot

La cinemática de maquinaria estudia los movimientos que puede realizar una determinada cadena cinemática dependiendo de las restricciones que imponen las articulaciones que unen los eslabones o cuerpos rígidos que conforman la cadena.

Al realizar el análisis cinemático de un manipulador o robot es necesario proponer un modelo matemático que elimine las características superfluas o no esenciales de la cadena y facilite la obtención de los parámetros geométricos importantes. Por lo general, el modelo matemático representa a un manipulador como una cadena cinemática de lazo abierto, formada por eslabones, conectados mediante pares cinemáticos. Un extremo de la cadena cinemática está formada por el efector final, mientras que el otro extremo está formada por un eslabón fijo o base que soporta el resto de la cadena.

En el caso del manipulador FANUC-200ib, todos los pares cinemáticos que conectan los eslabones de la cadena son pares de revoluto que permiten un movimiento relativo, entre eslabones adyacentes, de rotación alrededor de un eje fijo. En el eslabón fijo o base se selecciona un sistema coordinado fijo que usualmente es cartesiano (ver figura 2.7). La

posición del efector final usualmente se describirá respecto a este sistema coordenado.

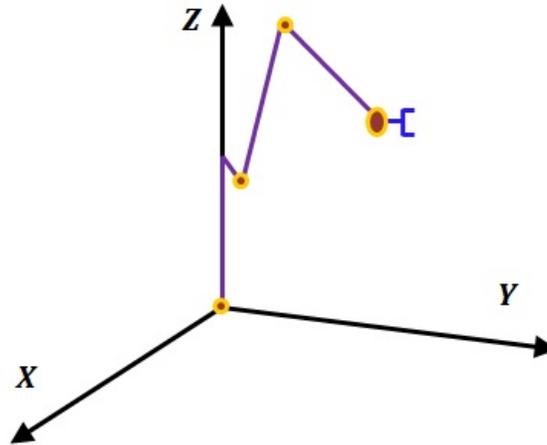


Figura 2.7: Diagrama del manipulador incluyendo un sistema coordenado fijo a la base.

2.4. Análisis de la Cinemática de un robot manipulador

La Cinemática es la ciencia dedicada al estudio de cómo se comportan los cuerpos sólidos en el espacio sobre el tiempo, la correlación de la posición y la orientación a través de las matrices de transformación homogénea.

2.4.1. Análisis de la Cinemática directa

De acuerdo a la definición clásica y según [6], “el problema de la cinemática directa se refiere a la relación entre las articulaciones individuales del manipulador de robot y la posición y la orientación de la herramienta del extremo. Dicho de manera más formal, el problema de cinemática directa es determinar la posición y la orientación del efector final, teniendo en cuenta los valores de las variables conjuntas del robot”.

De acuerdo a la definición anterior, la cinemática directa consiste en determinar la posición y la orientación del extremo final del brazo, con respecto a un sistema de coordenadas que se toma como referencia, conocidos los valores de movimiento de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot.

2.4.2. Análisis de la Cinemática inversa

La cinemática inversa por su lado, resuelve la configuración que debe adoptar el brazo para la posición y orientación del extremo conocido. En tal caso, los elementos del robot convergen de tal manera que el extremo final del robot se encuentre en una posición determinada.

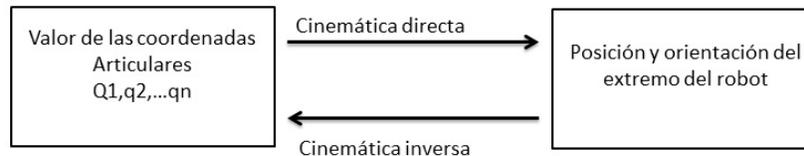


Figura 2.8: *Cinemática directa e inversa*

2.5. Métodos de optimización en Ingeniería

Los métodos de optimización son una rama de las matemáticas que es consistente en el uso de modelos matemáticos, estadísticos y algoritmos, con el objeto de realizar un proceso de toma de decisiones. Freceuntamente trata del estudio de complejos sistemas reales, con la finalidad de mejorara (u optimizar) su funcionamiento. La investigación de operaciones permite el análisis de la toma de decisiones teniendo en cuenta la escasez de recursos, para determinar como se puede optimizar un objetivo definido, como la maximización de los beneficios o la minimización de costos.

La Programación Matemática Clásica puede definirse como el conjunto de técnicas con las que la Matemática aborda el estudio general de los problemas de optimización mono-objetivo. El problema clásico de la teoría de la optimización consiste en determinar o elegir, de entre todas las alternativas posibles, aquella que posee un mayor grado de deseabilidad para el decisor, siendo ésta la solución óptima. Este planteamiento supone implícitamente que el criterio en el que están recogidas las preferencias del decisor se puede representar matemáticamente a través de una función, llamada “función objetivo”, que nos permitirá ordenar las decisiones posibles mediante la asignación, a cada una de ellas, de un índice de deseabilidad. Muchos de los problemas que se plantean en la vida real tienen esta estructura lógica común: la búsqueda de la mejor solución de cierto problema bajo determinadas restricciones. Ahora bien, pocas veces es posible evaluar una situación y decidir en base a un criterio único; son muchos los problemas de naturaleza económica que se caracterizan porque en la elección de la mejor decisión se han de tener en cuenta varios criterios y, por tanto, se desea alcanzar más de un objetivo. La programación multiobjetivo y, en general, la teoría de la decisión multicriterio, se encargan de la resolución de este tipo de problemas.[14]

Las técnicas de optimización han ido ganando enteros en aplicaciones donde la precisión no sea un valor crítico. Los algoritmos de optimización de errores necesitan variables de entradas, para su realización en programas como MatLab.

Método exhaustivo

El método exhaustivo prueba todas las combinaciones, calculando para cada una de ellas una función de error. Posteriormente, evalúa esos errores y devuelve el de menor valor, en este método exhaustivo el error será nulo, siendo esa combinación el mínimo global.

Para realizar el estudio y comparar los resultados obtenidos con el error de optimización, el primer paso consiste en identificar una expresión capaz de describir el error por si misma.

2.5.1. Métodos de optimización mono-objetivo

La palabra optimización se utiliza en el ámbito de las ciencias de la computación, para hacer referencia al proceso de encontrar la mejor solución a un problema, dado un conjunto de requerimientos. Las características y requerimientos del problema definen si la mejor solución puede ser determinada, o si generar una solución que satisfaga los requerimientos, es suficiente.

Los métodos de optimización mono-objetivo, son en los cuales se debe optimizar sólo una función objetivo.[15]

2.5.2. Métodos de optimización multi-objetivo

La programación multiobjetivo puede definirse como una parte de la investigación operativa que trata de proporcionar métodos útiles-eficientes para la toma de decisiones sobre problemas que incluyen diversidad de objetivos, a veces contradictorios, que son evaluados de acuerdo a múltiples criterios y donde no es evidente la mejor u óptima alternativa.

Las llamadas técnicas para la toma de decisión multicriterio se suelen dividir en dos grandes bloques, según las características de los problemas que afronten. Si el número de alternativas a considerar por parte del decisor es finito, el problema multiobjetivo será discreto y los métodos para su resolución se engloban en las técnicas de decisión multiatributo; de la búsqueda de alternativas óptimas dentro de un conjunto de decisiones continuo se encargan las técnicas de decisión multiobjetivo.[14]

2.6. Robots hiper-redundantes

Varios investigadores [2–5] han propuesto sistemas robotizados basados en manipuladores binarios.¹ Estos dispositivos, que pueden denominarse (*mecanismos digitales*, ya que se habla de actuadores), son capaces de realizar movimientos discretos y precisos sin necesidad de monitorear su comportamiento. Los manipuladores tradicionales poseen un pequeño número de grados de libertad continuos, mientras que un mecanismo digital aproxima este comportamiento usando un número elevado de grados de libertad binarios. Cuanto mayor es el número de grados de libertad² menor es el error de posición y orientación. Esto da lugar a mecanismos hiper-redundantes cuyo diseño global se basa, usualmente, en el ensamblado en serie de plataformas paralelas modulares.[7]

Los robots híper-redundantes se basan en el principio mediante el cual se necesitan diseños con mayor número de grados de libertad (gl) para realizar una tarea concreta. El número de grados de libertad “necesarios” que hacen falta en un robot dependen de la tarea para la que fue diseñado originalmente. Por ejemplo, en un entorno de tres dimensiones, se requiere un robot de 6 grados de libertad (Ver figura 2.9). [8]

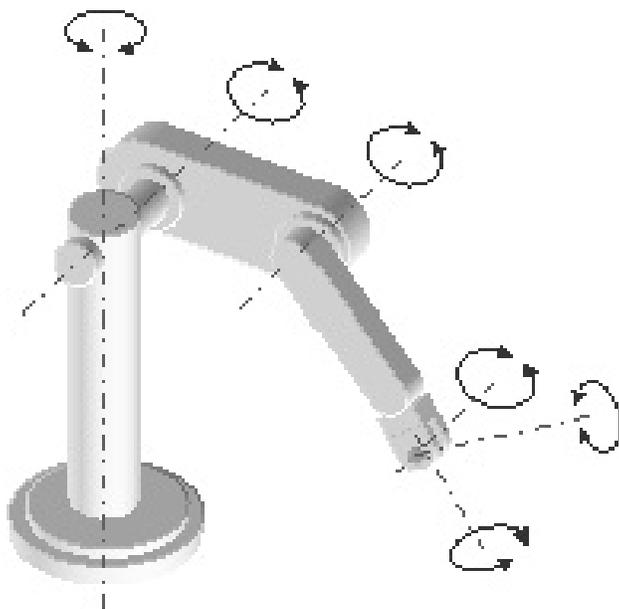


Figura 2.9: Robot con seis grados de libertad

¹Manipuladores binarios: es un manipulador compuesto por un conjunto de módulos con actuadores binarios (de dos estados estables).

²Grados de libertad: se refiere al movimiento de las piezas en un espacio tridimensional, como la traslación en los tres ejes perpendiculares (adelante/atrás, izquierda/derecha, arriba/abajo), la rotación en piezas cilíndricas o la combinación de movimientos anteriores.

2.6.1. Eslabones y articulaciones

Conforman la llamada cadena cinemática, los elementos rígidos o eslabones están mecánicamente unidos mediante articulaciones o pares cinemáticos, que permiten el movimiento relativo de los eslabones consecutivos (Ver figura 2.10).

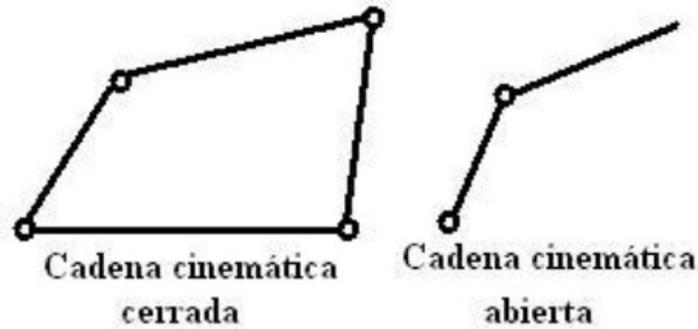


Figura 2.10: *Cadenas cinemáticas*

2.6.2. Tipos de articulaciones

Un robot convencional es una secuencia de articulaciones. Se conoce seis tipos de articulaciones básicas:

Tabla 2.1: *Tipos de articulaciones*

Rotacional	1 GL
Prismática	1 GL
Cilíndrica	2 GL
Planar	2 GL
Esférica (rótula)	3 GL
Tornillo	1 GL

Esta secuencia da origen un conjunto de parámetros que hay que conocer para definir la posición y orientación del efector final (Ver figura 2.11).

2.6.3. Grados de libertad

Los robots, al ser mecanismos compuestos de varias partes cuya finalidad es el realizar operaciones de forma automática, se encuentran limitados por un parámetro

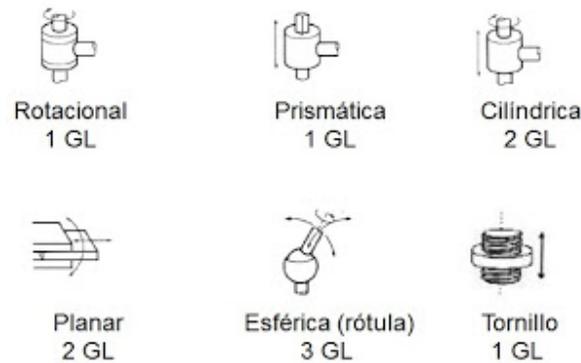


Figura 2.11: Grados de libertad

en especial, el cual da una conceptualización de la capacidad de trabajo y movilidad independiente del robot, este parámetro son los grados de libertad.

Grado de libertad se denomina a cada uno de los movimientos independientes que puede realizar cada articulación respecto con la anterior.

Los grados de libertad (llamados GDL), de un robot se determinan a partir de la sumatoria de todos los movimientos independientes que puede realizar las articulaciones de las cuales esta compuesto.

Para el robot industrial, los grados de libertad suelen equivaler al número de articulaciones que permiten un solo movimiento, como los pares cinemáticos, que se hablarán más adelante.

Un mayor número de GDL conlleva un aumento en la flexibilidad del posicionamiento del elemento terminado, por lo que la mayoría de aplicaciones industriales requieren de 6 grados de libertad como la soldadura, mecanizado, etc.

Para determinar el número de GDL de un mecanismo tridimensional en la cinemática convencional se usa el Criterio de Grübler, el cual mediante el análisis de los eslabones y articulaciones del robot determina la movilidad del mismo.[9]

$$GDL = 6 * (n - 1) - 5j_1 - 4j_2 - 3j_3 - 2j_4 - j_5 \quad (2.18)$$

Donde:

n = número de eslabones

j_i = número de pares cinemáticos con movilidad i

Conclusión

En este capítulo estudiamos las herramientas necesarias para aplicarlas en el siguiente capítulo. Como primer módulo se estudió lo que es un robot y las partes que la integran, así como el concepto del análisis cinemático y por último, los métodos de optimización para obtener los mejores resultados, a la hora de analizar los movimientos del robot manipulador.

Capítulo 3

Propuesta

En este capítulo se desarrolla la propuesta de esta tesis, en la cual se aplican varios métodos de optimización para obtener mejores movimientos evitando singularidades en el brazo robótico durante su operación, teniendo como base al análisis cinemático con los datos y resultados obtenidos en un anterior trabajo de tesis, donde se hace el estudio cinemático del robot manipulador.

3.1. Análisis cinemático del brazo robótico FANUC200ib

Como se había mencionado en el capítulo anterior, para la correcta elaboración del análisis cinemático de la cadena cinemática (del brazo), se debe seguir una serie de pasos que permitirán de manera acertada determinar tanto los parámetros Denavit-Hartenberg, como la matriz de transformación del robot analizado.

Los parámetros determinados por Denavit-Hartenberg son:

DH1. Numerar los eslabones comenzando con un (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con n (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.

DH2. Numerar cada articulación comenzando por 1 (la correspondiente al primer grado de libertad y acabando en n).

DH3. Localizar el eje de cada articulación. Si esta es rotativa, el eje será su propio eje de jiro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.

DH4. Para i de 0 a $n - 1$, situar el eje Z_i , sobre el eje de la articulación $i + 1$.

DH5. Situar el origen del sistema de la base (S_0) en cualquier punto del eje Z_0 . Los ejes X_0 e Y_0 se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro ¹ con Z_0 .

DH6. Para i de 1 a $n-1$, situar el sistema S_i (solidario al eslabón i) en la intersección del eje Z_i con la línea normal común a Z_{i-1} y Z_i . Si ambos ejes se cortasen se situaría (S_i) en el punto de corte. Si fuesen paralelos (S_i) se situaría en la articulación $i+1$.

DH7. Situar X_i en la línea normal común a Z_{i-1} y Z_i .

DH8. Situar Y_i de modo que forme un sistema dextrógiro con X_i y Z_i .

DH9. Situar el sistema (S_n) en el extremo del robot de modo que Z_n coincida con la dirección de Z_{n-1} y X_n sea normal a Z_{n-1} y Z_n .

DH10. Obtener ϕ_i como el ángulo que hay que girar en torno a Z_{i-1} para que X_{i-1} y X_i queden paralelos.

DH11. Obtener D_i como la distancia, medida a lo largo de Z_{i-1} , que habría que desplazar (S_{i-1}) para X_i y X_{i-1} quedasen alineados.

DH12. Obtener A_i como la distancia medida a lo largo de X_i (que ahora coincidiría con X_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo (S_{i-1}) para que su origen coincidiese con (S_i).

DH13. Obtener a_i como el ángulo que habría que girar en torno a X_i (que ahora coincidiría con X_{i-1}), para que el nuevo (S_{i-1}) coincidiese totalmente con (S_i).

DH14. Obtener las matrices de transformación $i-1A_i$.

DH15. Obtener la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot $T = 0A_1, 1A_2 \dots n-1A_n$.

DH16. La matriz T define la orientación (sub-matriz de rotación) y posición (sub-matriz de traslación) del extremo referido a la base en función de las n -coordenadas articulares. [11]

3.1.1. Parámetros y representación de Denavit y Hartenberg

Los parámetros y representación de Denavit y Hartenberg permiten determinar de manera única los parámetros geométricos de los eslabones que forman una cadena cinemática y los valores de los desplazamientos producidos por las revolutas del robot mediante el álgebra de matrices.

¹Dextrógiro: Un viraje es dextrógiro si se mueve en el mismo sentido que las agujas del reloj.

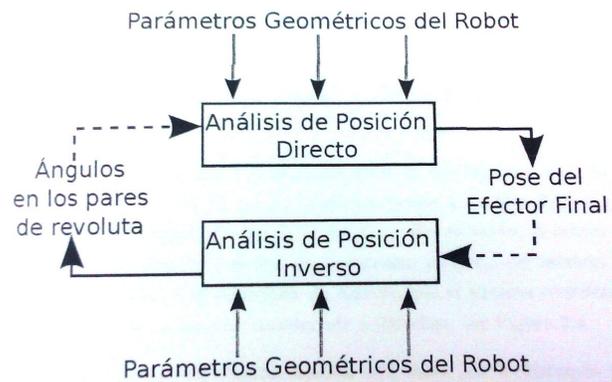


Figura 3.1: Relación entre los análisis de posición directo e inverso.

La premisa es usar una matriz de transformación homogénea para describir la transformación entre sistemas coordenados que se colocan en cada uno de los eslabones del robot. De esta manera, multiplicando esas matrices de transformación es posible determinar la pose de cualquier eslabon, incluido el efector final, respecto al sistema coordenado fijo localizado. Desafortunadamente, existen muchas variaciones para la determinación de los parámetros de Denavit y Hartenberg, las tres mas comunes se conocen como notación original, variante distal y variante próxima.[16]

Para este caso, se emplea la variante próxima.3.2

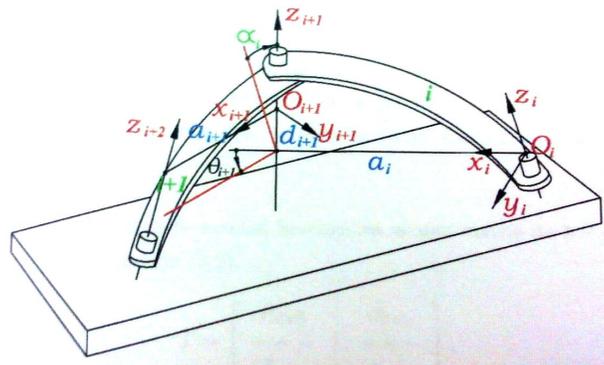


Figura 3.2: Variante próxima de la notación de Denavit y Hartenberg.

Cuando ya se conocen la orientación y posición de los sistemas coordenados fijos a cada uno de los eslabones, es posible determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg y se construye la tabla de parámetros correspondientes.

Esta tabla es necesaria para construir las matrices de transformación que permiten transformar coordenadas entre los sistemas coordenados fijos en eslabones adyacentes de una cadena cinemática en general y un manipulador o robot especial.

En la tabla anterior, los parámetros geométricos de los eslabones se representan

Tabla 3.1: *Parámetros de Denavit-Hartenberg para un manipulador FANUC200ib empleando la variante próxima*

Sistema fijo al eslabon i	θ_i	d_i mm	a_i mm	α_i rad
0			0	0
1	θ_1	350	150	$-\pi/2$
2	θ_2	0	250	0
3	θ_3	0	75	$-\pi/2$
4	θ_4	290	0	$\pi/2$
5	θ_5	0	0	$-\pi/2$
6	θ_6	0		

por la pareja de valores (a_i, α_i) , mientras que los valores de desplazamiento de los pares cinemáticos se representan por la pareja de valores (θ_i, d_i) . Sin embargo, como todos los pares cinemáticos del manipulador FANUC200ib son pares de revoluta, los valores d_i son también constantes.

3.1.2. Análisis de posición directo del brazo robótico

De acuerdo a los resultados obtenidos, usando los parámetros antes mencionados de Denavit y Hartenberg para el manipulador, se obtuvo la tabla de parámetros que se muestran en la tabla 3,1, cabe señalar que son datos hechos en un trabajo anterior, y que nosotros únicamente tomaremos para el análisis cinemático del brazo y posteriormente aplicar los métodos de optimización.

Para la comprobación del análisis de posición directo, se emplearon los siguientes valores para los ángulos de rotación de los pares de revoluta del manipulador.

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= 35^\circ = 0,61086523rad & \theta_2 &= -15^\circ = -0,26179938rad \\
 \theta_3 &= -45^\circ = -0,78539816rad & \theta_4 &= 30^\circ = 0,52359877rad \\
 \theta_5 &= 15^\circ = 0,26179938rad & \theta_6 &= -45^\circ = -0,78539816rad
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Con la ayuda de los parámetros de Denavit y Hartenberg y los valores de los ángulos de rotación de los pares de revoluta del manipulador, es posible determinar las siguientes matrices de transformación entre sistemas coordenados asociados a eslabones adyacentes.

3.1.3. Análisis de posición inverso del brazo robótico

En este apartado, se calculó previamente el valor de los ángulos que alcanzan las articulaciones del brazo, que se calculan a partir de la matriz de transformación homogénea

T (cuyos datos aparecen en el siguiente tema).

Una vez determinados los datos de entrada, que son las matrices de posición y orientación, obtenidos a partir de la matriz de transformación T, se realizan los cálculos del análisis de posición inverso.

Tabla 3.2: Valores de ángulos mediante el análisis de posición inverso.

Determinación de los ángulos θ	Posibles soluciones		Donde:
Ángulo θ_1	$\theta_{1a} = 35^\circ$	$\theta_{1c} = 215^\circ$	$\theta_{1a} = \tan^{-1}(557,12/390,10) = 35^\circ$ $\theta_{1c} = \theta_{1a} + 180^\circ$
Ángulo θ_2	$\theta_{2a} = -15^\circ$	$\theta_{2b} = 18,31^\circ$	$\theta_2 = 2\tan^{-1}\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$
Ángulo θ_3	$\theta_{3a} = -45^\circ$	$\theta_{3b} = -105,99^\circ$	El ángulo θ_{3a} se obtiene a partir de θ_{1a} y θ_{2a} y el ángulo θ_{3b} de los ángulos θ_{1b} y θ_{2b} respectivamente.

Con este cálculo termina la cinemática inversa de posición, que son las soluciones correspondientes del “codo arribaz “codo abajo”.

Posteriormente, de acuerdo a los resultados parciales del análisis de posición inverso, es posible determinar la matriz de transformación homogénea $T_0^3 = T_0^1 T_1^2 T_2^3$. Con esto se resuelve el problema de la cinemática inversa de orientación mediante la solución del análisis de posición de un mecanismo esférico de cuatro barras. El ángulo θ_{3n} es el ángulo de entrada del mecanismo esférico de cuatro barras, en su versión original este mecanismo esférico de cuatro barras involucra los sistemas coordenados asociados a los eslabones 3, 4, 5 y 6 del manipulador FANUC200ib. Para obtener la tabla de valores se renombran los parámetros de Denavit y Hartenberg del mecanismo esférico de cuatro barras resultante.

Tabla 3.3: Parámetros Denavit-Hartenberg para el mecanismo esférico de cuatro barras.

Manipulador FANUC200ib Mecanismo esférico inicial	Mecanismo esférico final	α_i rad
θ_{3n}	θ_2	$\alpha_2 = -\frac{\pi}{2}$
θ_4	θ_3	$\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$
θ_5	θ_4	$\alpha_4 = -\frac{\pi}{2}$
θ_6	θ_1	$\alpha_1 = 1,4410$

Entonces los valores de los ángulos están dados por:

$$\begin{aligned}
 \theta_{4a} &= 30^\circ & \theta_{5a} &= 15^\circ \\
 \theta_{4b} &= -150^\circ & \theta_{5b} &= -15^\circ \\
 \theta_{6a} &= -45^\circ & \theta_{6b} &= -45^\circ
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

En este apartado, se presentaron los valores numéricos de los ángulos θ que resuelven el análisis de posición inverso del manipulador FANUC200ib.

3.2. Definición del espacio de trabajo del brazo robótico

El espacio de trabajo del robot se define como la región descrita por el origen del sistema de referencia del efector final cuando todas las articulaciones del robot realizan todos los posibles movimientos.

Suele distinguirse entre:

- Espacio de trabajo alcanzable
- Espacio de trabajo diestro

Se define como espacio de trabajo diestro al volumen que el origen del sistema de referencia del efector final genera cuando realiza diferentes orientaciones. En otras palabras, en cada punto del espacio de trabajo diestro, el efector final puede orientarse arbitrariamente.

Se define como espacio de trabajo alcanzable al volumen de espacio que puede alcanzar el robot en por lo menos una orientación.

El espacio de trabajo se caracteriza por la geometría manipulador y los límites mecánicos de las articulaciones.

3.3. Definición y cálculo de la matriz Jacobiana para la posición del brazo

El análisis de singularidades de los robots se realizan con la ayuda de las matrices Jacobianas de cinemática directa e inversa, en este caso solo se hará uso de la matriz Jacobiana inversa. Se obtendrá el determinante de dicha matriz para posteriormente obtener las raíces del mismo. Por último las raíces nos proporcionarán información de las singularidades del robot, es decir, las posiciones que no puede alcanzar el robot.

La matriz Jacobiana directa permite conocer las velocidades del extremo del robot a partir de los valores de las velocidades de cada articulación. Por su parte, la matriz Jacobiana inversa permitirá conocer las velocidades determinadas en el extremo del robot. La Jacobiana

es una matriz que se puede ver como la versión vectorial de la derivada de una función escalar. La Jacobiana es importante en el análisis y control del movimiento de un robot (planificación y ejecución de trayectorias suaves, derivación de ecuaciones dinámicas). La Jacobiana permite conocer el área de trabajo del robot, y determinar las singularidades. Las singularidades son aquellas en las que el determinante de su matriz Jacobiana se anula, impidiendo de esta forma el cálculo de su Jacobiana inversa, lo que obligaría a movimientos de las articulaciones a velocidades inabordables por los actuadores. Por esta razón, en las inmediaciones de los puntos singulares, se pierde alguno de los grados de libertad del robot, siendo imposible que su extremo se mueva en una determinada dirección cartesiana.

Las singularidades se caracterizan por:

- Representan configuraciones desde las que no se puede alcanzar algunas trayectorias.
- Corresponden a puntos en el espacio de trabajo del manipulador inalcanzables al hacer pequeñas modificaciones en los parámetros de la articulación (longitud, desplazamientos).
- Cerca de singularidades o no hay solución al problema cinemático inverso o no hay infinitas soluciones.
- En la vecindad de una singularidad, pequeñas velocidades en el espacio operacional pueden producir grandes velocidades en el espacio de articulaciones. Es importante mencionar, que para evitar la aparición de configuraciones singulares debe considerarse su existencia desde la propia fase de diseño mecánico, imponiendo restricciones al movimiento o utilizando robots redundantes. En este caso, la presencia de singularidades es notoria debido a que para su movilidad se enfocan principalmente con la parte de programación visual, por esto omiten errores de diseño mecánico por los ángulos que intenta alcanzar el brazo y sin embargo le es imposible llegar.

3.4. Singularidades en el movimiento del brazo robótico

Determinar las configuraciones singulares es de gran interés debido a:

1. Las singularidades representan configuraciones en las que la movilidad de la estructura se reduce, es decir, no es posible imponer un movimiento arbitrario al efector final.
2. Cuando el robot está en una configuración singular, la cinemática inversa tiene infinitas soluciones.
3. En las proximidades de una configuración singular, velocidades muy bajas del extremo operativo se traducen en velocidades articulares demasiado elevadas.

3.4.1. Definición y clasificación de singularidades

3.4.2. Singularidades de contorno

Son aquellas en la que el robot adopta o bien una postura totalmente extendida o bien totalmente retraída. Estas singularidades no son peligrosas ya que son evitables, no llevando el manipulador a los extremos de su espacio de trabajo alcanzable.

3.4.3. Singularidades internas

Se producen en el interior del espacio de trabajo accesible y son generalmente causadas por la alineación de dos o más ejes de movimiento, o bien por la consecución de determinadas configuraciones del efector final. A diferencia de las de contorno, estas singularidades constituyen un problema grave, ya que pueden ser encontradas en cualquier lugar del espacio de trabajo accesible.

3.4.4. Desacoplo de singularidades

Debido a la alta complejidad de cálculo que requiere el cómputo de las singularidades, se divide el problema en dos:

- a) Hallar las singularidades del brazo robótico.
- b) Hallar las singularidades del extremo operativo.

Si se escoge como origen del sistema de referencia del efector final el centro de rotación de la muñeca (ejes 4, 5 y 6), la matriz jacobiana resulta ser triangular inferior, es decir: *chechar tema6.cinematica diferencia pag.18*

$$Z = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(J) = J_{11} J_{22} \quad (3.3)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \det(J_{11}) &\rightarrow \text{Singularidades del brazo robótico} \\ \det(J_{22}) &\rightarrow \text{Singularidades del extremo operativo} \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.4.5. Relaciones diferenciales

El método más directo para obtener la relación entre las velocidades articulares y del extremo del robot en diferenciar las ecuaciones correspondientes al modelo cinemático directo.

Con esto, planteamos:

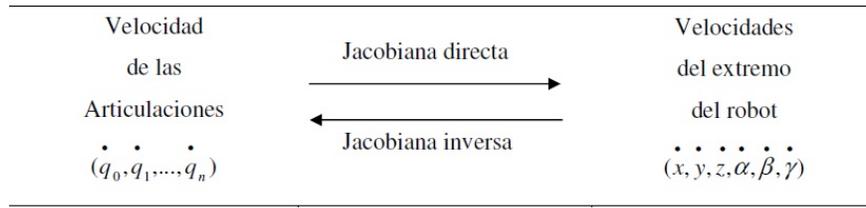


Figura 3.3: Método para obtener la relación entre velocidades.

$$\begin{aligned} x &= f_x(q_1, \dots, q_n) & y &= f_y(q_1, \dots, q_n) & z &= f_z(q_1, \dots, q_n) \\ \alpha &= f_\alpha(q_1, \dots, q_n) & \beta &= f_\beta(q_1, \dots, q_n) & \gamma &= f_\gamma(q_1, \dots, q_n) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Si se derivan con respecto al tiempo ambos miembros del conjunto de ecuaciones anteriores, se tendrá:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_1^n \frac{\partial f_x}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{y} &= \sum_1^n \frac{\partial f_y}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{z} &= \sum_1^n \frac{\partial f_z}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ \dot{\alpha} &= \sum_1^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{\beta} &= \sum_1^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{\gamma} &= \sum_1^n \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_i} \dot{q}_i \end{aligned} \quad (3.6)$$

O expresado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

La matriz J se denomina matriz Jacobiana. Debido a que el valor numérico de cada uno de los elementos $[j_{pq}]$ de la jacobiana dependerá de los valores instantáneos de las coordenadas articulares θ_i el valor de la jacobiana será diferente en cada uno de los puntos del espacio articular.

3.5. Análisis cinemático propuesto

Es importante mencionar que los parámetros Denavit-Hartenberg como se ha mencionado anteriormente, forman parte esencial sobre el estudio de la robótica, ya

que son un estándar a la hora de analizar la geometría de un brazo o manipulador robótico.

Antes de corregir los errores en el movimiento presentes en el brazo es importante conocer los valores de posición y orientación del mismo, así que en general para ello, es muy importante identificar los parámetros Denavit-Hartenberg para la obtención de matriz de transformación T.

Para obtener los parámetros con los valores de desplazamiento del brazo, primero debemos tener la matriz de transformación, que es la que define la orientación (sub-matriz de rotación) y posición (sub-matriz de traslación), que es lo que analiza primeramente para poder calcular el error existente y procurar omitirlos a la hora de su manipulación o programación visual.

3.5.1. Matriz de transformación T

Para obtener la matriz T fue necesario determinar las matrices de transformaciones individuales (cada eslabón define una matriz de transformación), la matriz de transformación total es la encadenación (multiplicación) de todas las matrices individuales, obteniendo:

$$T^6 = \begin{bmatrix} 0,36154180 & 0,77441261 & 0,51920383 & 557,128916 \\ 0,58382072 & -0,62222143 & 0,52153029 & 390,105866 \\ 0,72693939 & 0,11456695 & -0,67707719 & 334,656666 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

La matriz de transformación anterior, es obtenida a partir de las matrices de transformación individuales de cada eslabón. Las matrices ${}^{i+1}T_i$ para cada eslabón son las siguientes:

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$T_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_2) & -\cos(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$T_2^3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & a_2 \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$T_3^4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & -\sin(\theta_4) & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -\sin(\theta_4) & -\cos(\theta_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

La multiplicación de estas cuatro matrices de Transformación, pueden determinar la localización del centro de la muñeca esférica del manipulador FANUC200ib, las dos matrices restantes determinan la orientación del sistema coordinado fijo en el efector final del manipulador.

$$T_4^5 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_5) & -\sin(\theta_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin(\theta_5) & \cos(\theta_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$T_5^6 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_6) & -\sin(\theta_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_6) & -\cos(\theta_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Al multiplicar las matrices obtenemos T_0^6 que representa la posición del efector final y la rotación de su sistema de coordenadas móvil con respecto al sistema fijo ubicado en la base del robot.

$$T_0^6 = T_0^1 T_1^2 T_2^3 T_3^4 T_4^5 T_5^6 \quad (3.16)$$

Ya que se tienen las ecuaciones de posición de D-H o la matriz de transformación que es la que se obtuvo de acuerdo a la ecuación anterior, se pueden diferenciar dichas ecuaciones para obtener las relaciones de velocidades de las articulaciones y del efector final.

$$T_0^6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Donde:

$$\hat{X}_0^6 = \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}, \hat{Y}_0^6 = \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}, \hat{Z}_0^6 = \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

A partir de T_0^6 se obtuvo el jacobiano, en el que se debe corroborar que el determinante de su matriz se anule.

3.5.2. Posición y orientación del brazo

Con la matriz T , obtenemos la posición que está dada por:

$$P_c^{\rightarrow 6} = \begin{bmatrix} 557,128916 \\ 390,105866 \\ 334,656666 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Donde el vector de posición P_c que sitúa el centro de la muñeca esférica respecto al sistema $O_0X_0Y_0Z_0$, está dado por los tres primeros elementos de la cuarta columna de la matriz de transformación T .

De igual forma, la orientación del actuador final está dada por los vectores unitarios Z_0 y X_0 que corresponden al sistema coordenado fijo al mismo actuador final.

Estos vectores están formados por los primeros tres elementos de la tercera y primera columna de la matriz T .

$$Z^{\rightarrow 6} = \begin{bmatrix} 0,51920383 \\ 0,52153029 \\ -0,67707719 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$X^{\rightarrow 6} = \begin{bmatrix} 0,36154180 \\ 0,58382072 \\ 0,72693939 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

3.5.3. Análisis cinemático inverso

Una vez definidas las matrices de transformación y los vectores de posición y orientación antes mencionadas, se procede al cálculo de la Jacobiana inversa de la matriz de transformación, para realizar esta operación es necesario recordar, que se debe calcular el determinante de dicha matriz, posteriormente la adjunta, la transpuesta de la adjunta y con esto la inversa de la matriz.

En este caso, realizamos las operaciones en MatLab, al ser cantidades extremadamente grandes, solo se pondrá el código y los resultados en el capítulo cuatro, sin embargo, a partir de la ecuación (3.9) se obtiene la Jacobiana inversa quedando:

$$Det(T) = -227,0560$$

La inversa de la matriz Jacobiana queda de la siguiente forma:

$$Inv(T) = \begin{bmatrix} -1,9320 & 2,4266 & 0,3876 \\ -0,3885 & 1,2508 & -0,8114 \\ 0,0034 & -0,0027 & 0,0005 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Posteriormente para el cálculo de las singularidades como vimos en temas anteriores en este capítulo, se requiere obtener el determinante de la matriz inversa obtenida a partir de la matriz Jacobiana.

Sin embargo, existen puntos donde el Jacobiano no tiene inversa, es decir, es singular. Las singularidades se corresponden normalmente a los límites del espacio de trabajo o cuando dos o más ejes están alineados. Las singularidades producen pérdidas de grados de libertad, es decir, puntos en el espacio en los que no es posible mover el extremo del manipulador.

$$Z = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(J) = J_{11}J_{22} \quad (3.23)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \det(J_{11}) &\rightarrow \text{Singularidades del brazo robótico} \\ \det(J_{22}) &\rightarrow \text{Singularidades del extremo operativo} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Los puntos de singularidades del Jacobiano son aquellos en los que se anula el determinante. Para el caso del robot FANUC200ib, esto ocurre cuando q_2 es igual a 0 (límite del espacio de trabajo) o 180° (brazo plegado sobre sí mismo), además de dar como resultando uno de los puntos en θ_1 .

Para probar que el brazo robótico FANUC200ib tiene singularidades en su diseño, el determinante de su inverso nos debe dar nulo o cero, teniendo como base esto, comprobamos mediante MatLab, obteniendo así la matriz inversa con valores numéricos:

$$Inv(T) = \begin{bmatrix} -1,9320 & 2,4266 & 0,3876 \\ -0,3885 & 1,2508 & -0,8114 \\ 0,0034 & -0,0027 & 0,0005 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Y el determinante:

$$\det_{inv} = -0,0044 \quad (3.26)$$

Con esto comprobamos que el brazo FANUC200ib cuenta con ángulos singulares, el paso que sigue, es obtener mediante MatLab el determinante de la matriz inversa por medio de variables e ir probando con diferentes valores de los ángulos, para corroborar la orientación y posición que toma el brazo de acuerdo a la posición deseada del mismo.

Como el resultado (con variables) es extremadamente grande, se hace la siguiente comparación con cada eslabón por lo que se desarrolla lo siguiente:

Determinación del ángulo θ_1

La denominación del ángulo θ_1 se muestra en la figura 3.1, en donde el centro de la muñeca es denotado por el punto P_c , y su vector de posición esta dado por $r_0 = (r_x, r_y, r_z)$ y se supone que se encuentra dentro del espacio de trabajo. A partir de los parámetro DH, se sabe que el ángulo θ_1 debe ser perpendicular al eje Z_0 y por lo tanto, esta contenido en el plano $X_0 - Y_0$, que es igual al plano X-Y. El ángulo θ_1 esta dado por:

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{r_x}{r_y}\right) \quad (3.27)$$

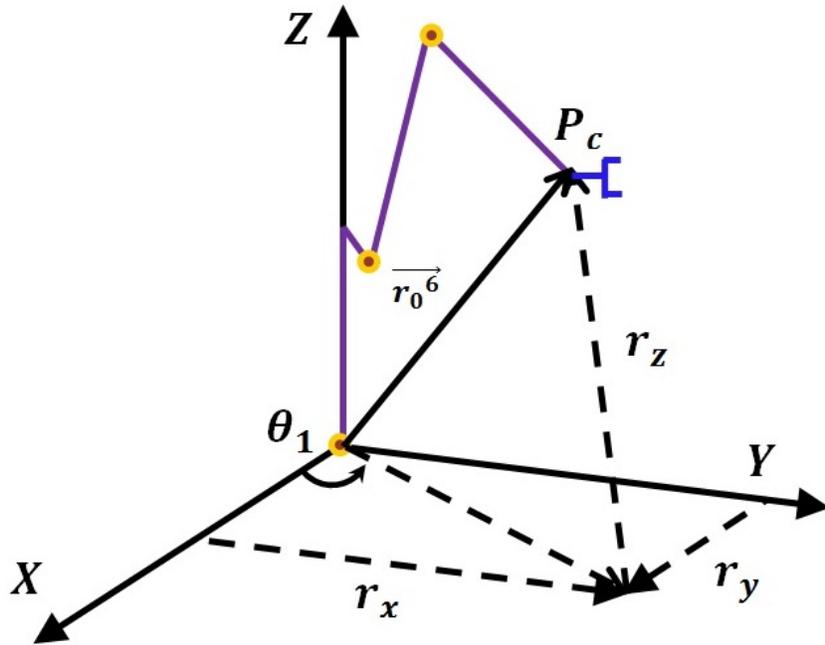


Figura 3.4: Posición del centro de la muñeca esférica.

Es evidente que existen dos posibles soluciones para el ángulo θ_1 , difieren en 180° o Π radianes.

La primera solución denominada θ_{1a} esta dada por la ecuación anterior:

$$\theta_{1a} = \tan^{-1}\left(\frac{557,12891}{390,10586}\right) \quad (3.28)$$

La segunda posible solución para θ_1 , denominada como θ_{1b} , está dada por $\theta_{1b} = \theta_{1a} + 180^\circ$. Dado esto tenemos:

$$\theta_{1b} = 215^\circ \quad (3.29)$$

Determinación del ángulo θ_2

A partir del ángulo θ_{1a} , existen dos posibles soluciones para el ángulo θ_2 . Estas soluciones se obtienen a partir de la siguiente ecuación:

$$\theta_2 = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \quad (3.30)$$

donde los valores numéricos de los parámetros a, b y c , están dados por:

$$a = \times 10^5, \quad b = -15343,333, \quad c = -11017,4242$$

El primer valor del ángulo θ_2 es el siguiente:

$$\theta_{2a} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = -15^\circ \quad (3.31)$$

El segundo valor del ángulo θ_2 es:

$$\theta_{2b} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = 18,315657^\circ \quad (3.32)$$

la figura 3.43 muestra los vectores correspondientes a las distancias a_i y d_i asociados a los parámetros DH del manipulador FANUC200ib. La suma de estos vectores debe ser igual a la suma de las componentes r_z a lo largo del eje Z y $\sqrt{r_x^2 + r_y^2}$ a lo largo de la proyección de la muñeca esférica, punto P_c , sobre el plano X-Y, sin embargo, para simplificar la solución del problema, esta proyección se identifica con el semieje positivo X de la figura 3.43. Para la determinación de los ángulos θ_2 y θ_3 se calcula además, el ángulo γ que es constante.

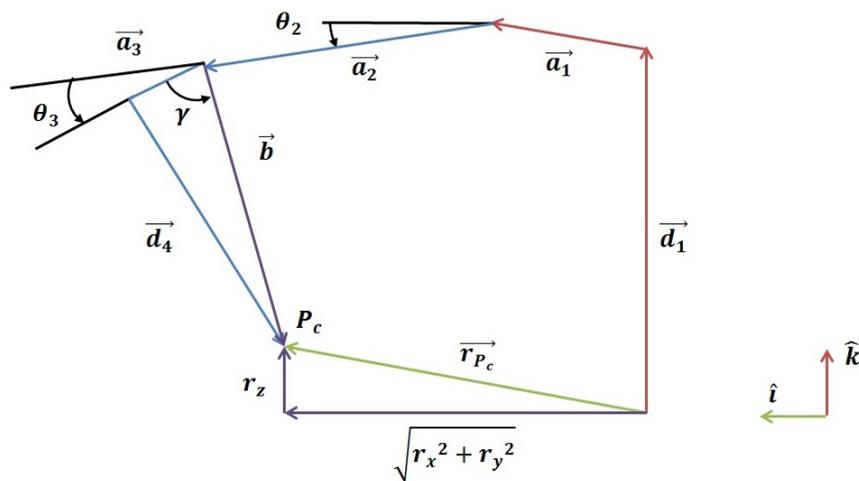


Figura 3.5: Vectores para el cálculo de θ_2 y θ_3 .

La figura 3.44 muestra las soluciones para θ_2 y θ_3 de la cinemática inversa de posición para cuando el ángulo θ_1 se encuentra en el primer cuadrante.

La figura 3.45 muestra geoméricamente las soluciones para θ_2 y θ_3 de la cinemática inversa de posición para cuando el ángulo θ_1 se encuentra en el tercer cuadrante.

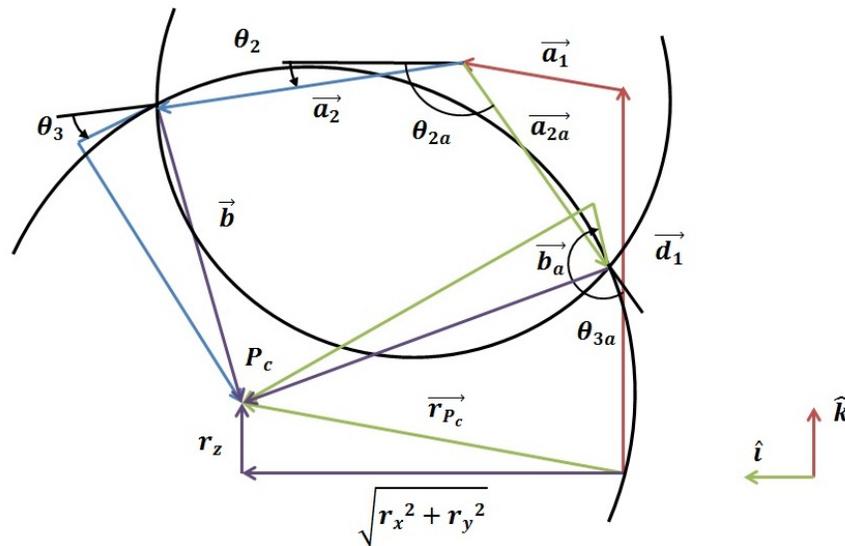


Figura 3.6: Soluciones para θ_2 y θ_3 para cuando θ_1 está en el primer cuadrante.

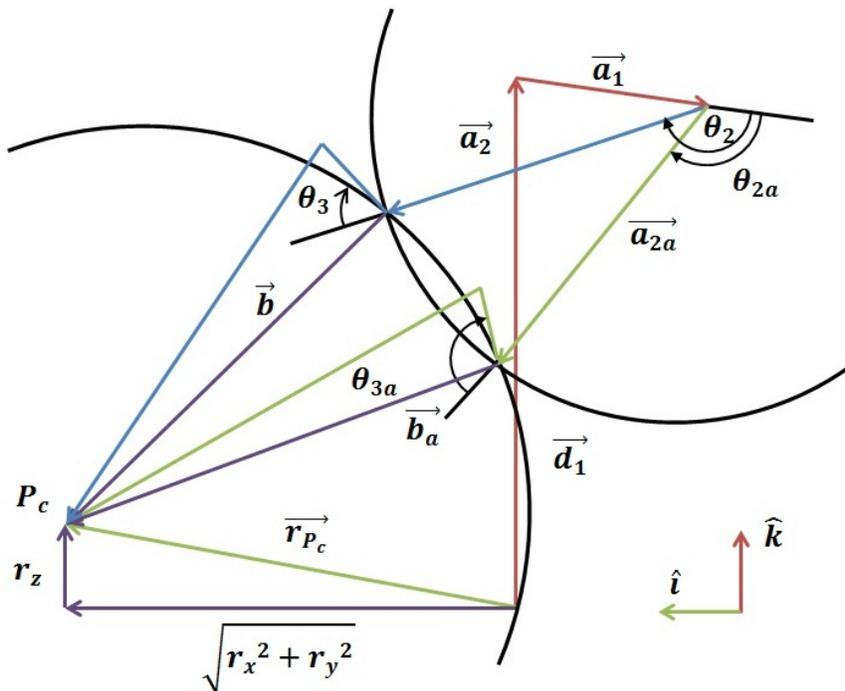


Figura 3.7: Soluciones para θ_2 y θ_3 para cuando θ_1 está en el tercer cuadrante.

Determinación del ángulo θ_3

El ángulo θ_{3a} correspondiente a los valores de los ángulos θ_{1a} y θ_{2a} se obtiene la siguiente ecuación:

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left(\frac{d_1 - r_z - a_2 S_{2a}}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 - a_1 - a_2 C_{2a}}} - \theta_{2a} - \gamma \right) \quad (3.33)$$

Donde:

$$\gamma = \tan^{-1} \left(\frac{d_4}{a_3} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{290}{75} \right) = 75,4998^\circ$$

Luego θ_{3a} es igual a:

$$\theta_{3a} = \tan^{-1} \left(\frac{350 - 334,65666 - 250 \text{sen}(15^\circ)}{\sqrt{557,12891^2 + 390,10586^2 - 150 - 250 \text{cos}(15^\circ)}} - 15^\circ - 75,4998^\circ = -45^\circ \right) \quad (3.34)$$

El ángulo θ_{3b} corresponde a los valores de los ángulos θ_{1b} y θ_{2b} , el cual se obtiene de la siguiente ecuación:

$$\theta_{3b} = \tan^{-1} \left(\frac{d_1 - r_z - a_2 S_{2b}}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 - a_1 - a_2 C_{2b}}} - \theta_{2b} - \gamma \right) \quad (3.35)$$

Donde el valor del ángulo γ permanece igual. Por lo tanto, θ_{3b} queda de la siguiente forma:

$$\theta_{3b} = \tan^{-1} \left(\frac{350 - 334,65666 - 250 \text{sen}(18,315657^\circ)}{\sqrt{557,12891^2 + 390,10586^2 - 150 - 250 \text{cos}(18,315657^\circ)}} - 15^\circ - 75,4998^\circ = -105,9996664^\circ \right) \quad (3.36)$$

Con este cálculo termina la cinemática inversa de posición. En el capítulo cuatro se muestra la solución gráfica para el cálculo de los ángulos θ_{2a} y θ_{3a} que corresponden a la solución de codo arribaz los ángulos θ_{2b} y θ_{3b} corresponden a la solución codo abajo”.

Hasta este punto, se puede apreciar que el ángulo θ_{1b} no es parte de las soluciones válidas para el resto de los ángulos θ .

Determinación del ángulo θ_4, θ_5 y θ_6

De los resultados obtenidos a partir del análisis de posición inverso, es posible determinar la matriz de transformación homogénea $T_0^3 = T_0^1 T_1^2 T_2^3$. Con esta matriz de transformación, se obtienen los vectores unitarios X_0^3 y Z_0^3 que corresponden al sistema coordinado $O_3 X_3 Y_3 Z_3$. Estos vectores son iguales a los tres primeros elementos de la primera y tercera columna de la matriz T_0^3 .

$$X_0^3 = \begin{bmatrix} 0,40957602 \\ 0,28678821 \\ 0,86602540 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$Z_0^3 = \begin{bmatrix} 0,40957602 \\ 0,28678821 \\ 0,86602540 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Por otra parte, de los datos de entrada del análisis de posición inverso, se conoce el vector unitario Z_0^6 , que resulta como:

$$Z_0^6 = \begin{bmatrix} 0,51920383 \\ 0,52153029 \\ -0,67707719 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

El objetivo de calcular estos últimos ángulos es resolver la cinemática inversa de orientación mediante la solución del análisis de posición de un mecanismo esférico de cuatro barras. A continuación se determinan los parámetros geométricos del mecanismo esférico correspondiente. Por lo que el nuevo vector queda de la siguiente forma:

$$X_n^6 = Z_0^6 \times Z_0^3 = \begin{bmatrix} 0,55933246 \\ 0,39164880 \\ 0,73058771 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

A partir de lo anterior, es posible calcular el valor del ángulo α_6 mediante:

$$\alpha_6 = \text{sen}^{-1}[(Z_0^6 \times Z_0^3)X_n^6] = 82,564527^\circ = 1,44102285\text{rad}$$

El nuevo ángulo θ_{3n} que está medido entre los vectores X_n^6 y X_0^3 se calcula del mismo modo, quedando como:

$$\theta_{3n} = \text{sen}^{-1}[(X_n^6 \times X_0^3)Z_0^3] = -13,064313^\circ = -0,2280152\text{rad}$$

El ángulo θ_{3n} es el ángulo de entrada del mecanismo esférico de cuatro barras, en su versión original este mecanismo esférico de cuatro barras involucra los sistemas coordenados asociados a los eslabones 3, 4, 5 y 6 del manipulador FANUC200ib.

Como se ha estado trabajando de acuerdo a los parámetros DH, entonces se renombran los parámetros del mecanismo esférico de cuatro barras resultante.

Resolviendo el análisis de posición esférico de cuatro barras final, donde el ángulo de entrada θ_2 , está dado por $\theta_2 = -13,064313^\circ$, se encuentran los valores correspondientes a θ_1 , θ_3 y θ_4 . De acuerdo a la siguiente ecuación, obtenemos:

$$\cos(\theta_4) = \frac{\text{sen}(\alpha_1)\cos(\theta_2)\sin(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_4)\cos(\alpha_3)}{\text{sen}(\alpha_4)\text{sen}(\alpha_3)} \quad (3.41)$$

Tabla 3.4: *Parámetros Denavit-Hartenberg inicial y final para el mecanismo de cuatro barras*

Mecanismo Esférico Inicial	Mecanismo Esférico Final	α_i rad
θ_{3n}	θ_2	$\alpha_2 = -\pi/2$
θ_4	θ_3	$\alpha_3 = \pi/2$
θ_5	θ_4	$\alpha_4 = -\pi/2$
θ_6	θ_1	$\alpha_1 = 1,44102285$

Puesto que la función coseno es par, las dos posibles soluciones para θ_4 son:

$$\theta_{4a} = 15^\circ \text{ y } \theta_{4b} = -15^\circ$$

A partir de los valores de las funciones seno y coseno del ángulo θ_3 , se tiene que:

$$\theta_3 = \tan^{-1} \frac{\text{sen}(\theta_3)}{\text{cos}(\theta_3)} \quad (3.42)$$

De la ecuación anterior, para un valor de $\theta_{4a} = 15^\circ$, el valor correspondiente θ_{3a} está dado por los valores del $\text{sen}(\theta_{3a})$.

$$\text{cos}(\theta_{3a}) = \tan^{-1} \left(\frac{0,5}{0,86602532} \right) = 30^\circ$$

De igual forma, para el valor de $\theta_{4b} = -15^\circ$, el valor correspondiente θ_{3b} está dado por:

$$\text{cos}(\theta_{3b}) = \tan^{-1} \left(\frac{-0,5}{-0,86602532} \right) = -150^\circ$$

Los resultados obtenidos hasta este punto corresponden al mecanismo esférico de cuatro barras final. Los valores de los ángulos θ_4 y θ_5 del mecanismo esférico de barras final, quedan de la siguiente forma:

$$\theta_{4a} = 30^\circ, \theta_{4b} = -150^\circ, \theta_{5a} = 15^\circ, \theta_{5b} = -15^\circ$$

Para el cálculo de los ángulos para θ_6 , está dada a partir de los siguiente:

$$T_0^6 = T_0^1 T_1^2 T_2^3 T_3^4 T_4^5 T_5^6 = T_0^3 T_3^4 T_4^5 T_5^6$$

Es posible obtener lo siguiente:

$$T_5^6 = (T_4^5)^{-1} (T_3^4)^{-1} T_0^6$$

Donde la matriz de transformación homogénea T_5^6 entre los sistemas $O_5 X_5 Y_5 Z_5$ y $O_6 X_6 Y_6 Z_6$ son iguales a:

3.6. TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN APLICADO A LOS ESLABONES DEL BRAZO ARTICULADO 42

$$T_5^6 = T_5^{4T} T_3^{4T} T_0^{3T} T_0^6$$

Luego, la matriz T_5^6 tiene la siguiente forma:

$$T_5^6 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_6) & -\text{sen}(\theta_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta_6) & -\cos(\theta_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Empleando los valores de θ_{1a} , θ_{2a} , θ_{3a} , θ_{4a} y θ_{5a} , se obtiene la siguiente matriz numérica:

$$T_5^6 = \begin{bmatrix} 0,70710678 & 0,70710678 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,70710678 & 0,70710678 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, los valores de $\text{sen}(\theta_{6a})$ y $\cos(\theta_{6a})$ son iguales a:

$$\text{sen}(\theta_{6a}) = -0,70710678 \text{ y } \cos(\theta_{6a}) = 0,70710678$$

Por lo tanto:

$$\theta_{6a} = \tan^{-1} \left(\frac{-0,70710678}{0,70710678} \right) = -45^\circ$$

Con esto se prueba que sustituyendo los valores de θ_{1a} , θ_{2a} , θ_{3a} , θ_{4a} y θ_{5a} , se obtiene el mismo valor para θ_{6b} . Es decir, $\theta_{6b} = -45^\circ$.

3.6. Técnicas de optimización aplicado a los eslabones del brazo articulado

Las técnicas de optimización son muy importantes y juegan un papel importante a la hora de referirnos a aplicaciones donde la precisión no sea un valor crítico. Los algoritmos de optimización de errores necesitan variables de entradas, para su realización en programas como MatLab.

3.7. Análisis de método exhaustivo para la optimización del brazo robótico

El método exhaustivo prueba todas las combinaciones válidas de optimización calculando para cada una de ellas una función de error. Posteriormente, evalúa esos

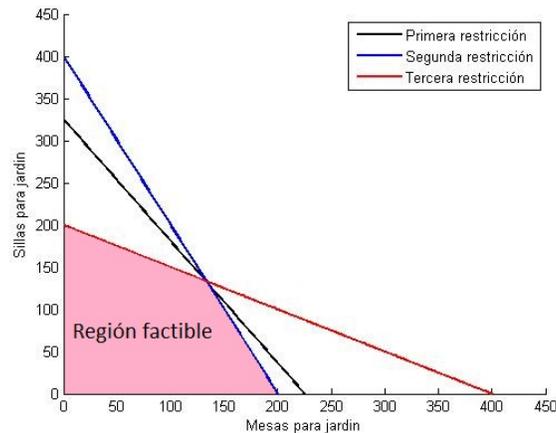


Figura 3.8: Ejemplo de aplicación de un método de optimización, identificando la región factible.

errores y devuelve el de menor valor, en este método exhaustivo el error será nulo, siendo esa combinación el mínimo global.

Por lo tanto, este método siempre encontrará la combinación de módulos que consigue llegar sin error al destino deseado.

Método de minimización de error de optimización

Las técnicas de optimización han ido ganando enteros en aplicaciones donde la precisión no sea un valor crítico. Los algoritmos de optimización de errores necesitan variables de entradas, para su realización en programas como MatLab.

Para realizar el estudio y comparar los resultados con el error de optimización, el primer paso consiste en identificar una expresión capaz de describir el error por si misma.

Método de minimización de error de posición

La ecuación 3.43 muestra como se calcula el error de posición ε_p . Éste es calculado mediante una distancia euclidiana, donde P_u es el vector de posición propuesto y P_c es el vector de posición final calculado. P_x , P_y y P_z representan las direcciones x , y y z del valor de la componente de los vectores de posición tanto del definido por el usuario y el calculado.

$$\varepsilon_p = \sqrt{(P_{ux} - P_{cx})^2 + (P_{uy} - P_{cy})^2 + (P_{uz} - P_{cz})^2} \quad (3.43)$$

Esta forma de calcular el error de posición fue escogida porque atiende a un cálculo cuyo coste computacional es muy ligero y es también una manera práctica de ponderación del error en función de la distancia al objetivo. Cuanto más cerca del punto final del

3.7. ANÁLISIS DE MÉTODO EXHAUSTIVO PARA LA OPTIMIAZCIÓN DEL BRAZO ROBÓTICO44

cálculo es a la posición definida por el usuario más bajo es el ε_p y, consecuentemente, el error final de la expresión.

Vector de posición calculado

$$P_c = \begin{bmatrix} 557,128916 \\ 390,105866 \\ 334,656666 \end{bmatrix}$$

Vector de posición propuesto

$$P_u = \begin{bmatrix} 557 \\ 390 \\ 334 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, sustituyendo en la ecuación de error de posición obtenemos:

$$\varepsilon_p = 0,6775$$

La misma metodología se utiliza para calcular el error de orientación final ε_A ver (3.43). A , es un vector que indica la orientación del último plano al vector normal del brazo. La única diferencia entre el error de posición es que, ambos vectores, A_u (especificado por el usuario) y A_c (calculado), son unitarios, y por lo tanto ε_A varía entre parámetros limitados, siendo $0 < \varepsilon_A < 2$.

$$\varepsilon_A = \sqrt{(A_{ux} - A_{cx})^2 + (A_{uy} - A_{cy})^2 + (A_{uz} - A_{cz})^2} \quad (3.44)$$

Del cual obtenemos:

$$\varepsilon_A = 0,0034$$

Que es el error de posición tomando en cuenta la orientación en Z0, para X0 se obtiene:

$$\varepsilon_A = 0,1171$$

Por último, es necesario disponer de una ecuación de error completo para comparar los métodos, lo cual se logra mediante la aplicación de la ecuación 3.45. El parámetro λ se elige para hacer hincapié en la prioridad del tipo de error que el usuario desea reducir, mientras que el parámetro β es una constante para crear una expresión físicamente coherente, ya que ε_p se mide en unidades de longitud y ε_A es una transformación unitaria del vector dirección. A efectos comparativos de este proyecto se establecieron los siguientes valores para los parámetros de ajuste, $\lambda = 4$ y $\beta = 1$.

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_p^2}{\lambda} + \varepsilon_A^2 + \frac{\varepsilon_p \varepsilon_A}{\beta} \quad (3.45)$$

3.7. ANÁLISIS DE MÉTODO EXHAUSTIVO PARA LA OPTIMIAZCIÓN DEL BRAZO ROBÓTICO 45

Sustituyendo los valores, a la ecuación anterior se obtiene el error completa para comparación de los métodos en $Z0 = 0,1171$ y en $EX0 = 0,1183$. Con estos valores se puede apreciar como en cada posición y orientación del brazo, al momento en que realice un cambio de posición mediante el cambio de ángulo, el error existente para que pueda accionar libremente es casi nulo (tomando en cuenta los valosres de los ángulos óptimos para su operación, es decir omitiendo en la programación los ángulos 0, 180 y 215).

Hay que tomar en cuenta que la función de error utilizada para el método exhaustivo, debe tener un coste suave para la eliminación de errores en la optimización, para ello los parámetros de ajuste betta y lambda actúan sobre el error de posición y orientación respectivamente. A continuación, se aplican las siguientes ecuaciones de acuerdo a los valores obtenidos anteriormente, se aplican entonces:

$$normPu = \sqrt{(Pu_x)^2 + (Pu_y)^2 + (Pu_z)^2} \quad (3.46)$$

$$normPc = \sqrt{(Pc_x)^2 + (Pc_y)^2 + (Pc_z)^2} \quad (3.47)$$

$$\varepsilon_p = \sqrt{\left(\frac{Pu_x}{normPu} - \frac{Pc_x}{normPc}\right)^2 + \left(\frac{Pu_y}{normPu} - \frac{Pc_y}{normPc}\right)^2 + \left(\frac{Pu_z}{normPu} - \frac{Pc_z}{normPc}\right)^2} \quad (3.48)$$

$$\varepsilon = \beta \cdot \varepsilon_p + \lambda \cdot e^{\varepsilon A} \quad (3.49)$$

Los resultados obtenidos en estas ecuaciones son los siguientes: Parámetros de ajuste betta y lambda que actúan sobre el error de posición y orientación

$$normPu = 757,5652 \text{ , } normPc = 758,0042$$

Error de posición total

$$Eptotal = 0,4416$$

Error de posición total EN Z0

$$Eatotal = -0,9966$$

Error de posición total EN Z0

$$Eatotal = -0,9966$$

Error de posición total EN Z0

$$E_{totalZ} = -0,9966$$

Error de posición total EN X0

$$E_{totalX} = -0,9949$$

Parámetros de ajuste de posición y orientación en Z0

$$EZ = 5,1743$$

Parámetros de ajuste de posición y orientación en X0

$$EX = 5,1797$$

3.8. Gráficas resultantes de los cálculos obtenidos en el brazo robótico

3.8.1. Gráficas de resultados de los ángulos codo-abajo y codo-arriba.

En el desarrollo de este capítulo se desarrollan los cálculos para la obtención de los ángulos de la cinemática inversa de posición, sin embargo, la solución gráfica para los ángulos θ_2 y θ_3 corresponden a la solución de codo arriba, los ángulos θ_{2b} y θ_{3b} a la solución de codo abajo.

Aquí se aprecia que el ángulo θ_{1b} no es parte de las soluciones para el espacio de trabajo adecuado y el funcionamiento óptimo del brazo robótico FANUC200ib.

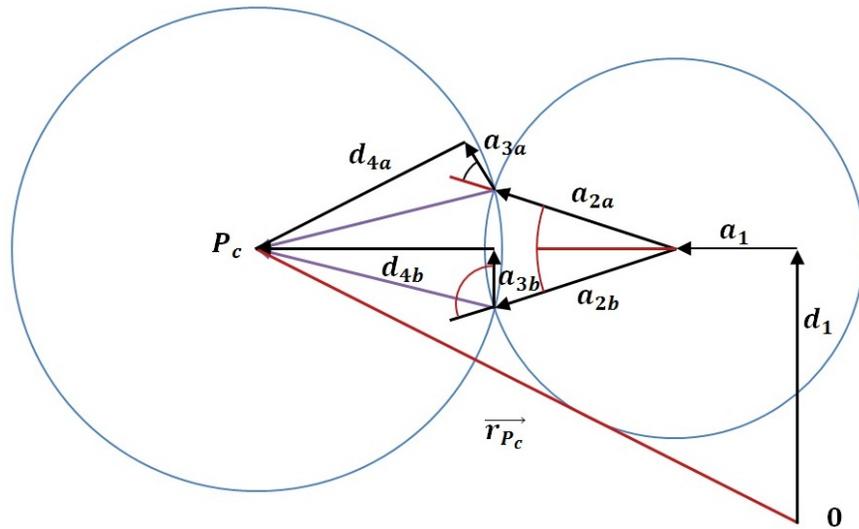


Figura 3.9: Comprobación de las soluciones para el ángulo θ_{1a}

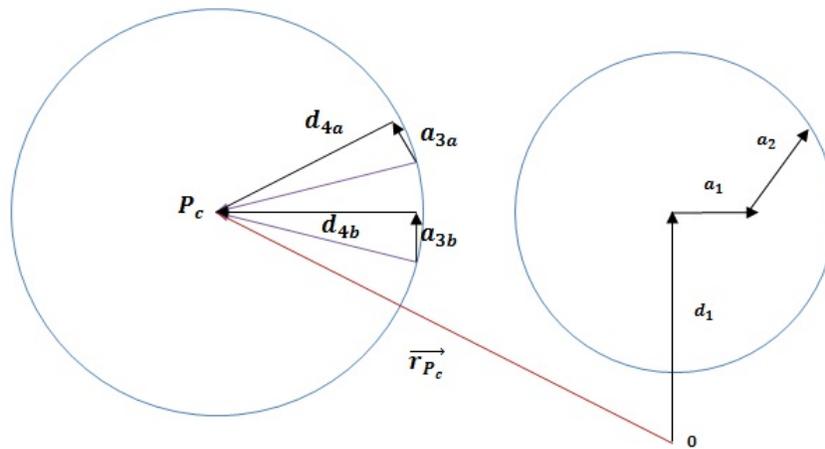


Figura 3.10: Comprobación de la no existente solución para el ángulo θ_{1b}

3.8.2. Gráficas de resultados de cálculos en MatLab

Código en MatLab para el cálculo de la matriz de transformación T.

```
clear all; close all; clc;
```

```
syms q1 q2 q3 q4 q5 q6 d1 d2 d3 d4 a1 a2 a3 a4 real
```

$$T1 = [\cos(q1) \quad -\sin(q1) \quad 0 \quad 0; \sin(q1) \quad \cos(q1) \quad 0 \quad 0; 0 \quad 0 \quad d1 \quad 0; 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1];$$

$$T2 = [\cos(q2) \quad -\sin(q2) \quad 0 \quad a1; 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0; -\sin(q2) \quad -\cos(q2) \quad 0 \quad 0; 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1];$$

3.8. GRÁFICAS RESULTANTES DE LOS CÁLCULOS OBTENIDOS EN EL BRAZO ROBÓTICO 48

$$T3 = [\cos(q3) - \sin(q3)0a2; \sin(q3)\cos(q3)00; 0010; 0001];$$

$$T4 = [\cos(q4) - \sin(q4)0a3; 001d4; -\sin(q4) - \cos(q4)00; 0001];$$

$$T5 = [\cos(q5) - \sin(q5)00; 00 - 10; \sin(q5)\cos(q5)00; 0001];$$

$$T6 = [\cos(q6) - \sin(q6)00; 0010; -\sin(q6) - \cos(q6)00; 0001]; \text{disp('Matriz de Transformación homogénea')}$$

$$\text{disp('Vector de Posición } P_c') \text{simplify}(T0(:, 4))$$

$$\text{disp('Vector de Orientación } Z'_0') \text{simplify}(T0(:, 3))$$

$$\text{disp('Vector de Orientación } X'_0') \text{simplify}(T0(:, 1))$$

Como podemos observar, los resultados son increíblemente grandes, por lo que se opta por presentar valores numéricos y no simbólicos. Resultados obtenidos mediante el código anterior. Matriz de transformación T

```

Matriz de Transformación homogenea T0

ans =

[ sin(q6)*(cos(q4)*sin(q1) - sin(q4)*(cos(q1)*cos(q2)*cos(q3) - cos(q1)*sin(q2)*sin(q3))) + cos(q6)*(cos(q5)*(sin(q1)*sin(q4) + cos(q4)*(cos(q1)*cos(q2)*cos(q3) - cos(q1)*sin(q2)*sin(q3))) - sin(q5)*(cos(q1)*cos(q2)*sin(q3) + cos(q1)*cos(q3)*sin(q2))), cos(q6)*(cos(q4)*sin(q1) - sin(q4)*(cos(q1)*cos(q2)*cos(q3) - cos(q1)*sin(q2)*sin(q3))) - sin(q6)*(cos(q5)*(sin(q1)*sin(q4) + cos(q4)*(cos(q1)*cos(q2)*cos(q3) - cos(q1)*sin(q2)*sin(q3))) - sin(q5)*(cos(q1)*cos(q2)*sin(q3) + cos(q1)*cos(q3)*sin(q2))), - sin(q5)*(sin(q1)*sin(q4) + cos(q4)*(cos(q1)*cos(q2)*cos(q3) - cos(q1)*sin(q2)*sin(q3))) - cos(q5)*(cos(q1)*cos(q2)*sin(q3) + cos(q1)*cos(q3)*sin(q2)), cos(q1)*(a1 + a3*cos(q2 + q3) - d4*sin(q2 + q3) + a2*cos(q2))]
[ - sin(q6)*(cos(q1)*cos(q4) - sin(q4)*(sin(q1)*sin(q2)*sin(q3) - cos(q2)*cos(q3)*sin(q1))) - cos(q6)*(cos(q5)*(cos(q1)*sin(q4) + cos(q4)*(sin(q1)*sin(q2)*sin(q3) - cos(q2)*cos(q3)*sin(q1))) + sin(q5)*(cos(q2)*sin(q1)*sin(q3) + cos(q3)*sin(q1)*sin(q2))), sin(q6)*(cos(q5)*(cos(q1)*sin(q4) + cos(q4)*(sin(q1)*sin(q2)*sin(q3) - cos(q2)*cos(q3)*sin(q1))) + sin(q5)*(cos(q2)*sin(q1)*sin(q3) + cos(q3)*sin(q1)*sin(q2))) - cos(q6)*(cos(q1)*cos(q4) - sin(q4)*(sin(q1)*sin(q2)*sin(q3) - cos(q2)*cos(q3)*sin(q1))), sin(q5)*(cos(q1)*sin(q4) + cos(q4)*(sin(q1)*sin(q2)*sin(q3) - cos(q2)*cos(q3)*sin(q1))) - cos(q5)*(cos(q2)*sin(q1)*sin(q3) + cos(q3)*sin(q1)*sin(q2)), sin(q1)*(a1 + a3*cos(q2 + q3) - d4*sin(q2 + q3) + a2*cos(q2))]
[
sin(q2 + q3)*sin(q4)*sin(q6) - cos(q6)*(cos(q2 + q3)*sin(q5) + sin(q2 + q3)*cos(q4)*cos(q5)),
sin(q6)*(cos(q2 + q3)*sin(q5) + sin(q2 + q3)*cos(q4)*cos(q5)) + sin(q2 + q3)*cos(q6)*sin(q4).

```

Figura 3.11: Matriz de transformación calculada mediante MatLab.

Así los resultados obtenidos numéricamente, son los siguientes:

Con los datos obtenidos a partir de los ángulos correspondientes a θ , y a partir del cálculo del determinante de la matriz Jacobiana inversa, obtenemos los ángulos que no son óptimos y que se deben evitar a la hora de la programación y levantamiento de una pieza con el brazo robótico.

3.8.3. Resultados con los métodos de optimización del tiempo de respuesta del brazo robótico

Como se observó a lo largo del este capítulo, al calcular la optimización de errores tiene como objetivo evitar que se presenten singularidades en el brazo robótico, ya que los resultados nos daban en decimales y fueron valores no significativos lo que significa que *al cambio de posición de los eslabones, el tiempo de cambio en la posición y orientación, no fue significativo de acuerdo a las décimas obtenidas* sin embargo, estas optimizaciones sirven para que posteriormente se tomen en cuenta a la hora de su diseño y al analizar las velocidades y fuerzas que también son parte esencial en el análisis de un brazo robótico.

3.8. GRÁFICAS RESULTANTES DE LOS CÁLCULOS OBTENIDOS EN EL BRAZO ROBÓTICO 50

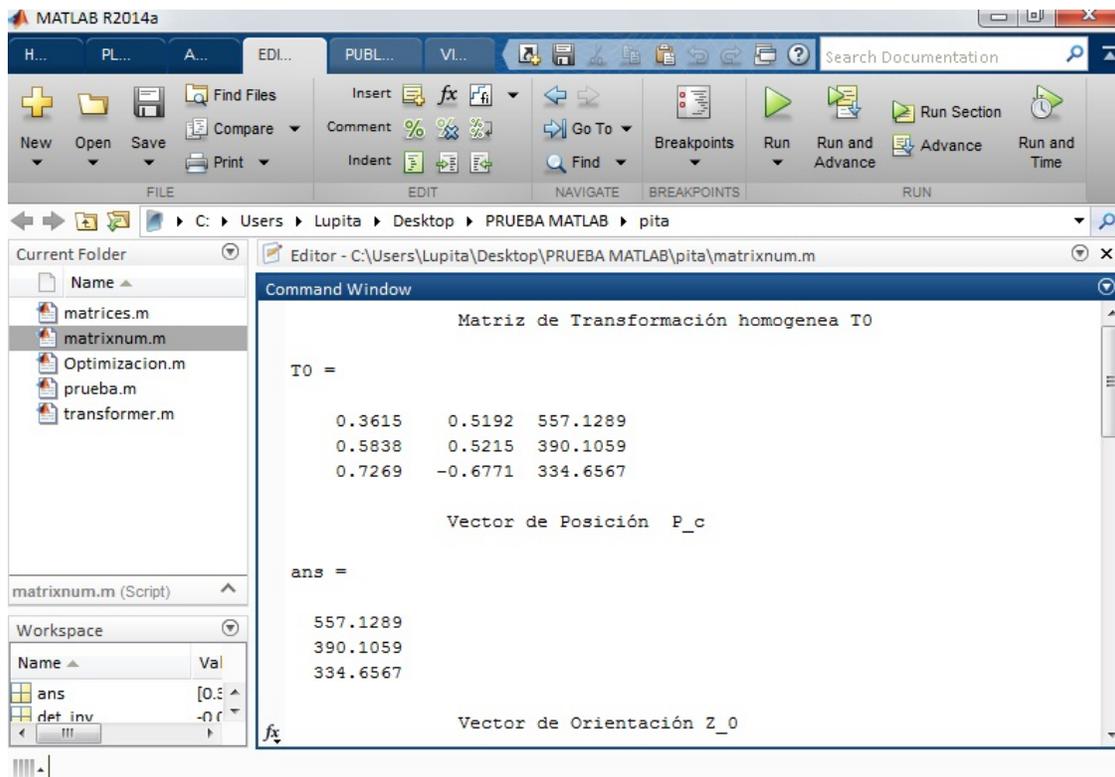


Figura 3.12: Resultados numéricos (a)

Conclusión

En este capítulo se obtuvo la optimización en el espacio de trabajo del brazo para evitar que se presenten errores de singularidad en el momento de su manipulación, haciendo un estudio cinemático y usando MatLab para que por medio de resultados numéricos obtenidos se puedan comparar, los ángulos de movimiento óptimo o espacio de trabajo adecuado. Además que se obtuvieron los factores de error que hay en cada eslabón del brazo y posteriormente, se tomen en cuenta estos cálculos para el diseño óptimo de los manipuladores. En el siguiente capítulo se analizaremos y describiremos detalladamente los gráficos y los resultados mediante los códigos utilizados para el desarrollo de esta tesis y así darle un uso adecuado al brazo robótico FANUC200ib, omitiendo en el espacio de trabajo los puntos singulares calculados.

3.8. GRÁFICAS RESULTANTES DE LOS CÁLCULOS OBTENIDOS EN EL BRAZO ROBÓTICO 51

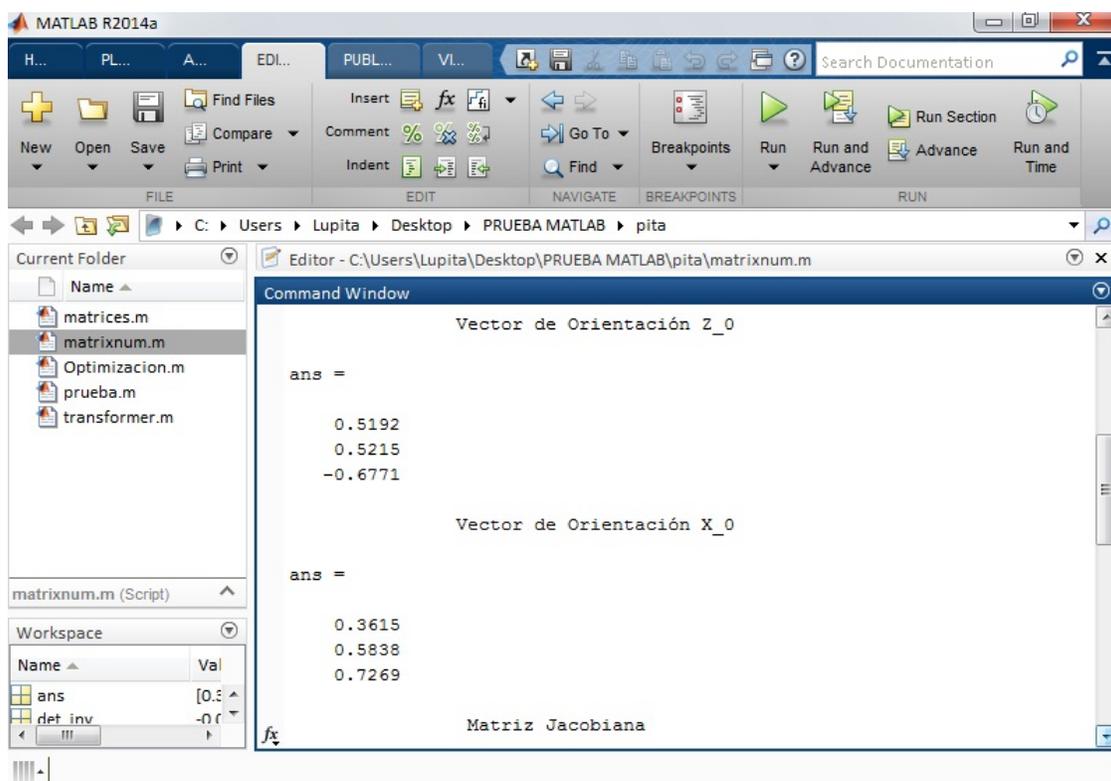


Figura 3.13: Resultados numéricos (b)

3.8. GRÁFICAS RESULTANTES DE LOS CÁLCULOS OBTENIDOS EN EL BRAZO ROBÓTICO52

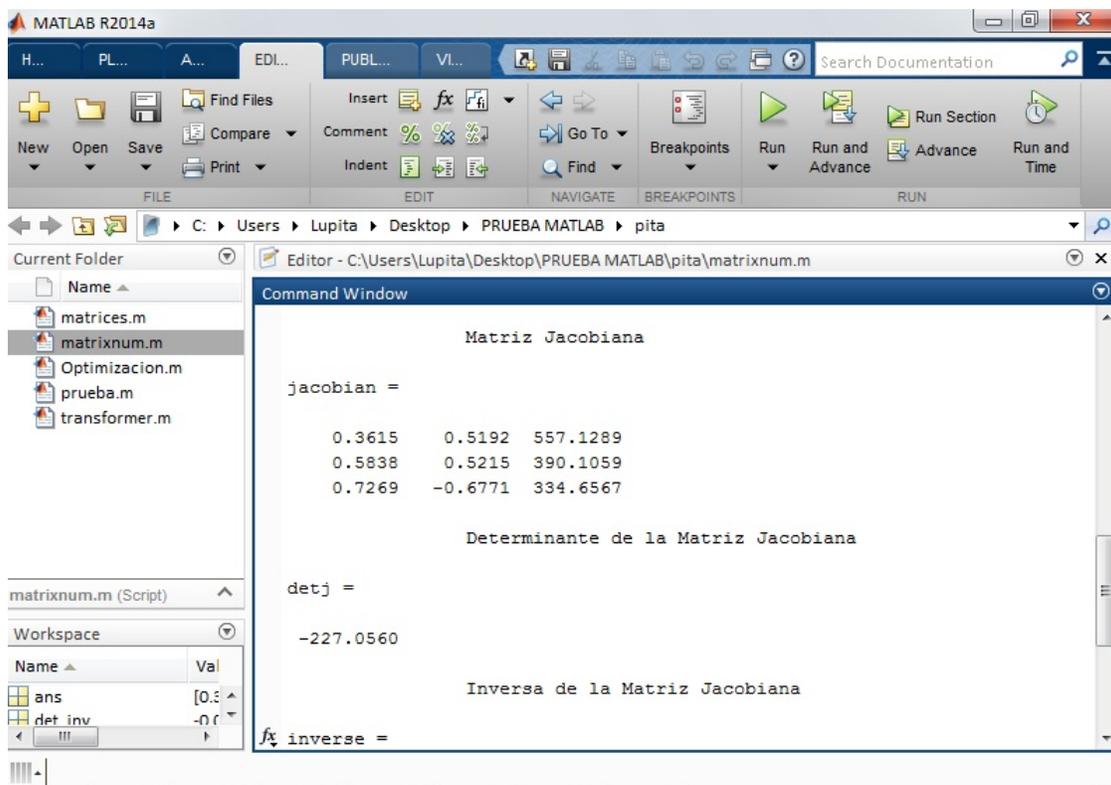


Figura 3.14: Resultados numéricos (c)

3.8. GRÁFICAS RESULTANTES DE LOS CÁLCULOS OBTENIDOS EN EL BRAZO ROBÓTICO 53

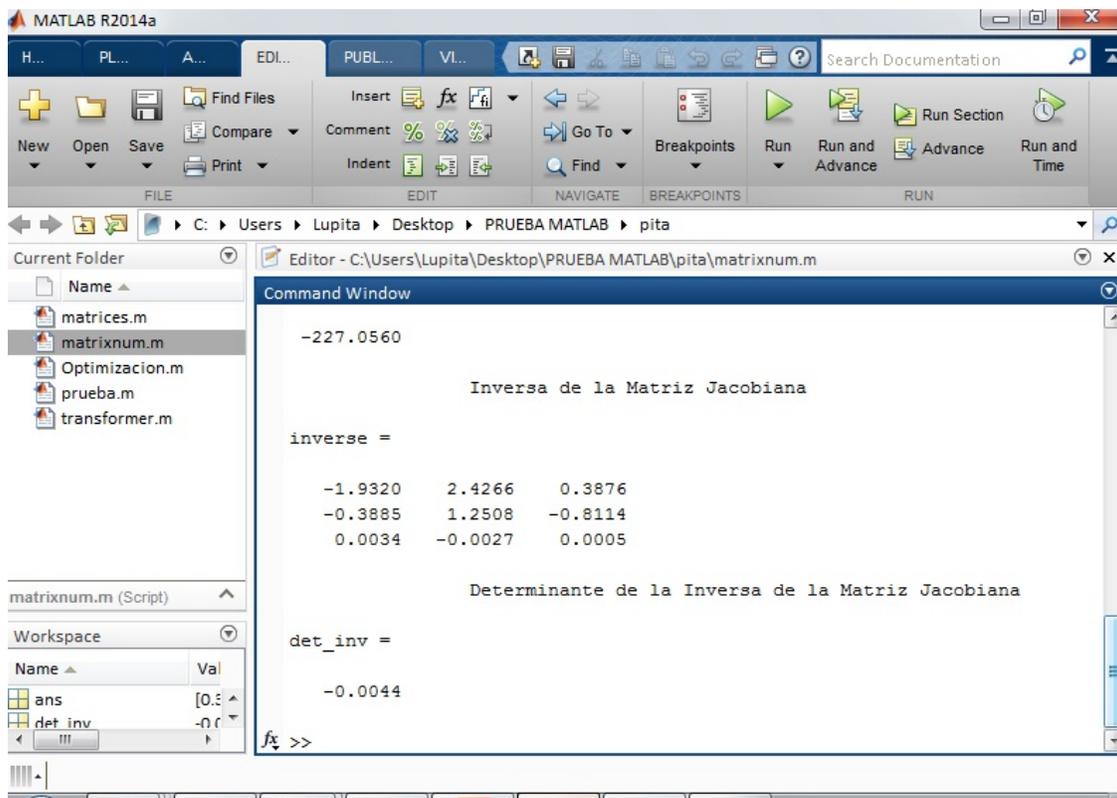


Figura 3.15: Resultados numéricos (d)

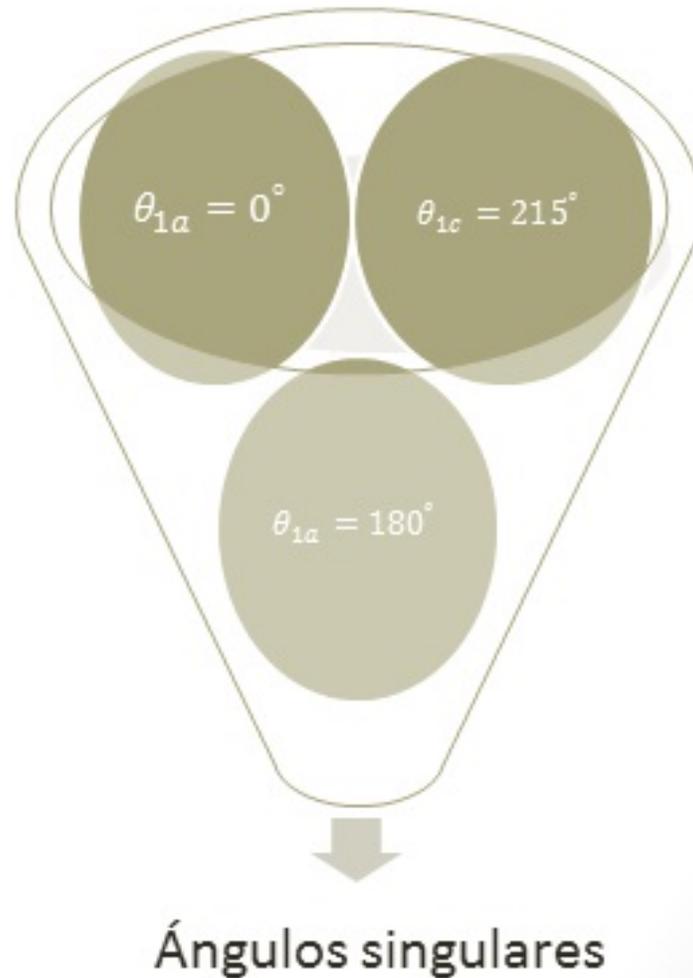


Figura 3.16: *Ángulos singulares obtenidos.*

3.8. GRÁFICAS RESULTANTES DE LOS CÁLCULOS OBTENIDOS EN EL BRAZO ROBÓTICO 55

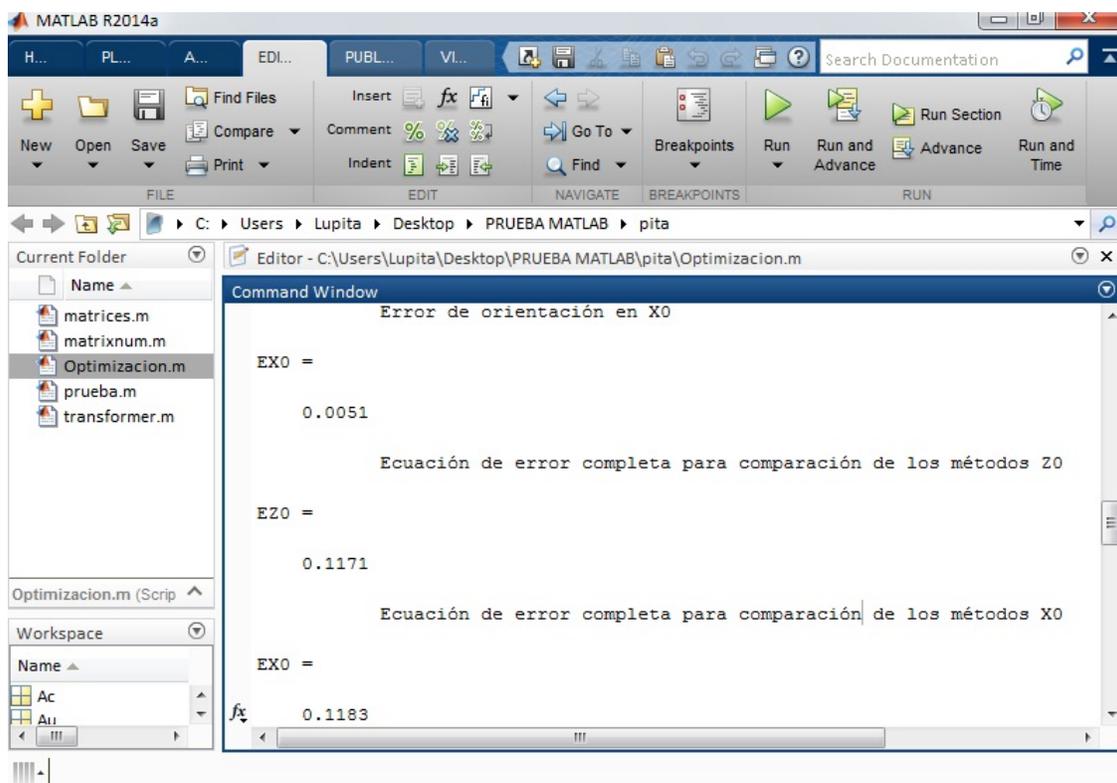


Figura 3.17: Minimización de error (a).

3.8. GRÁFICAS RESULTANTES DE LOS CÁLCULOS OBTENIDOS EN EL BRAZO ROBÓTICO 56

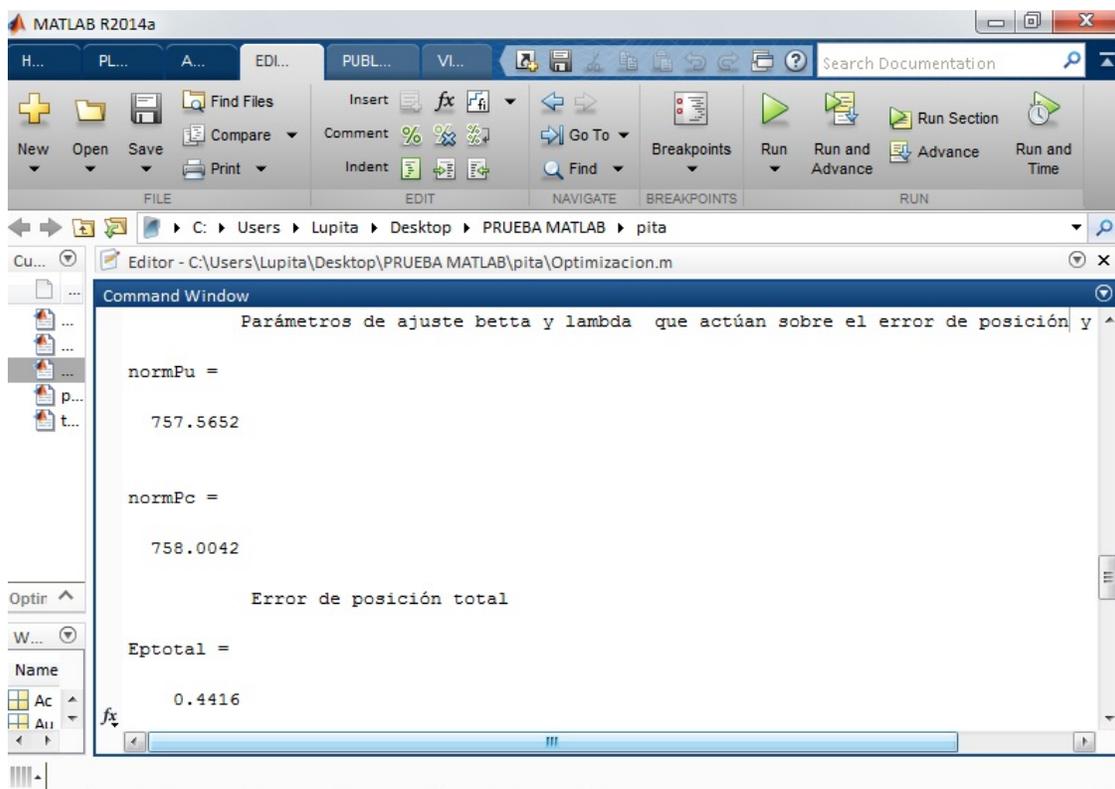


Figura 3.18: Minimización de error (b).

3.8. GRÁFICAS RESULTANTES DE LOS CÁLCULOS OBTENIDOS EN EL BRAZO ROBÓTICO 57

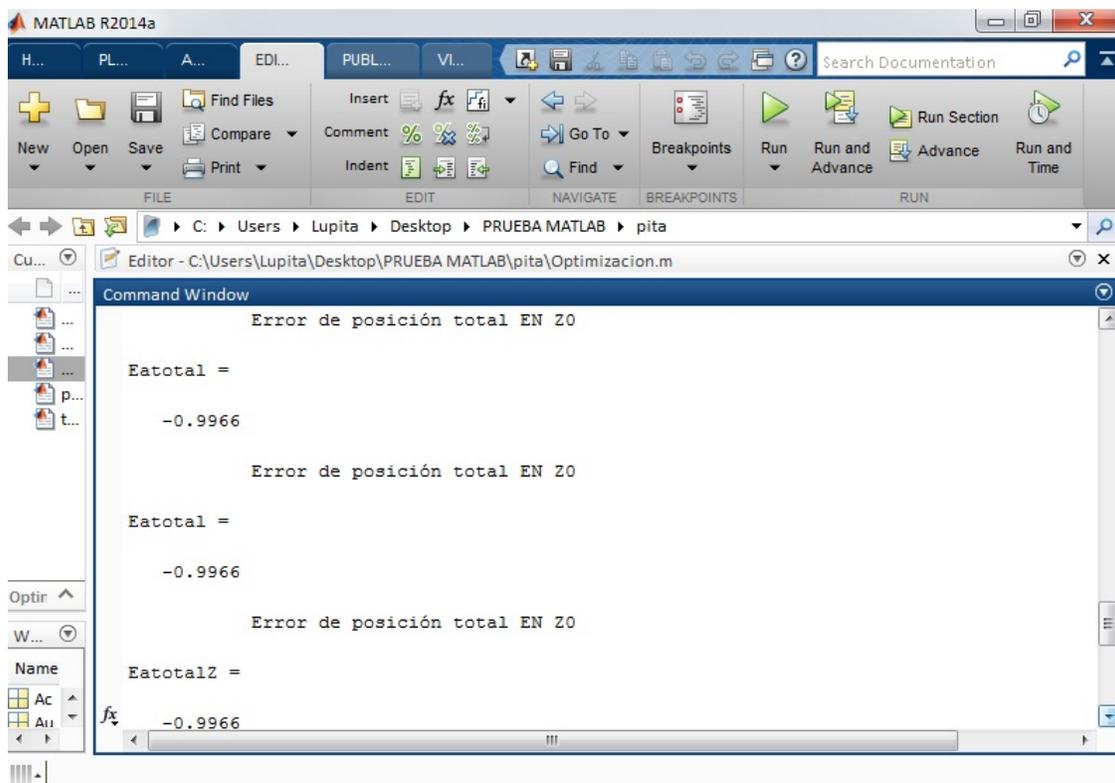


Figura 3.19: Minimización de error (c).

3.8. GRÁFICAS RESULTANTES DE LOS CÁLCULOS OBTENIDOS EN EL BRAZO ROBÓTICO 58

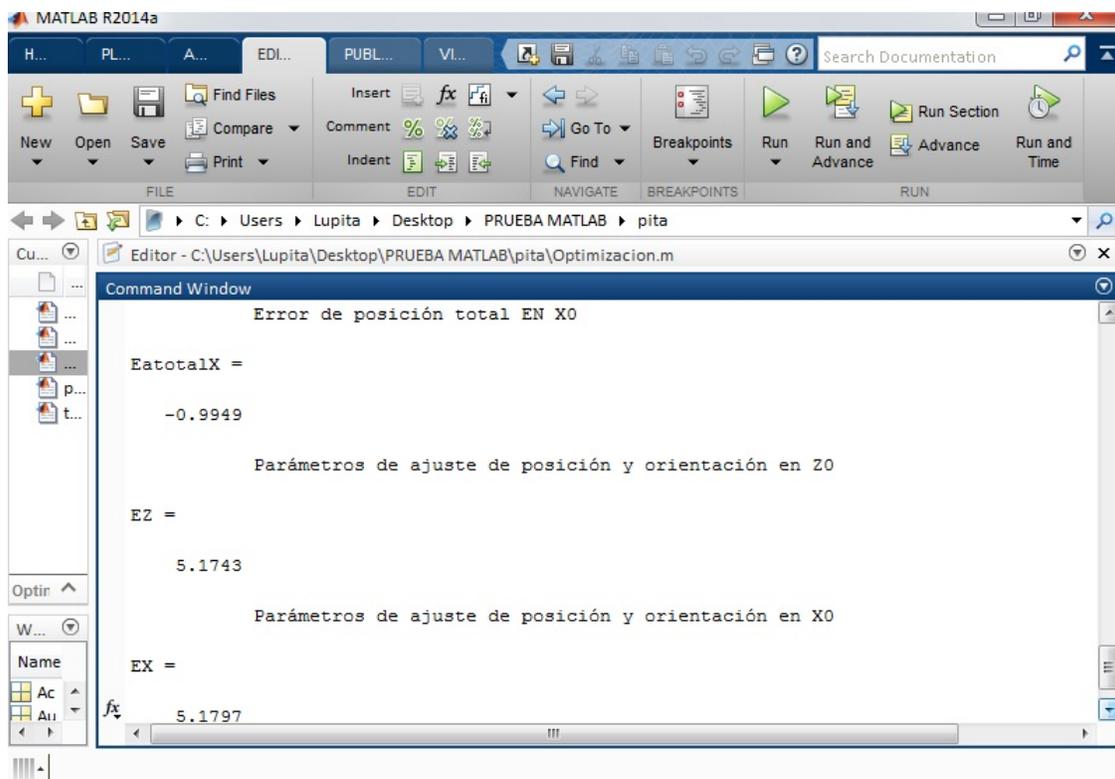


Figura 3.20: Minimización de error (d).

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo de tesis, se ha mostrado la finalización del análisis de la cinemática del brazo robótico, así como la aplicación de distintos métodos para obtener movimientos óptimos a la hora de la manipulación del mismo.

Este análisis cinemático hace referencia a la localización espacial del robot con la variación del tiempo, mediante el uso de información con respecto a la posición y orientación de sus componentes.

Se han obtenido los puntos singulares que se deben evitar a la hora de su manipulación mediante la programación, con esto sin duda el brazo robótico FANUC200ib podrá utilizarse de modo didáctico con movimientos óptimos puesto que se conoce el área de trabajo alcanzable.

A continuación se explicarán los resultados obtenidos y el alcance de los objetivos de este trabajo de tesis.

4.1. Alcance de objetivos de este trabajo de tesis

En el objetivo general de esta tesis expuesto en el capítulo uno se describe que se desarrolla el análisis cinemático del brazo robótico con el fin de evitar la presencia de singularidades, pues bien, para alcanzar este objetivo fue necesario describir los objetivos específicos que son los pasos a seguir para alcanzar el trabajo.

Como primer parte para alcanzar el objetivo de esta tesis se analizaron los movimientos del brazo y las limitaciones que tiene, es decir conectando el brazo y observando desde el principio el punto inicial de este brazo, el cual desde el principio se notó que el brazo tenía problemas con algunos servomotores, por tanto, desde la posición inicial se pudo apreciar que tenía un punto singular, de ahí se partió para el analizar cinemáticamente y por medio de cálculos matemáticos obtener estos puntos.

Como segundo paso fue necesario realizar ajuste matemático para los grados de libertad del brazo y ver exactamente en que ángulos en el plano había puntos singulares o ángulos que el

brazo no es capaz de alcanzar a la hora de manipular un objeto, se hizo uso de los sistemas dinámicos lineales, en el cual se definió una matriz de transformación homogénea de la cual obtendríamos nuestros vectores de posición y orientación en cada eslabón del brazo (o en cada grado de libertad).

La matriz de transformación es muy indispensable ya que, con ésta obtuvimos de manera global todos los movimientos o combinaciones de movimientos que puede realizar el brazo, posteriormente de dicha matriz se procedió a calcular la inversa del jacobiano de la matriz de transformación, obteniendo de este modo los puntos singulares en el brazo y en el extremo operativo, que se explicará en breve.

Finalmente se calcularon los errores existentes, entre cada movimiento de los eslabones aplicando, para ello, la minimización de errores mediante algoritmos de optimización en la cual se utiliza una distancia euclidiana con valores de los vectores de posición y orientación calculado y propuesto, sin embargo, estos errores no son significativos para el uso óptimo del brazo, sino detectar los puntos en el espacio que no pueden ser alcanzados por el brazo y de este modo en una posterior programación de movimientos se omitan estos valores obtenidos.

4.1.1. Matriz de transformación homogénea total

A partir de la tabla de parámetros Denavit-Hartenberg expuesto en el capítulo tres, se obtienen las matrices de transformación para cada eslabón del brazo, recordemos que el brazo robótico cuenta con seis grados de libertad, por lo tanto, tiene seis matrices de transformación.

Para obtener la matriz de transformación homogénea total, fue necesario multiplicar estas seis matrices de transformación, y el resultado obtenido es la matriz de mayor importancia, ya que con esta obtuvimos los vectores de posición y orientación.

$$\hat{X}_0^6 = \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}, \hat{Y}_0^6 = \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}, \hat{Z}_0^6 = \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

4.1.2. Puntos singulares

Recordamos que para el cálculo de las singularidades existentes en el brazo robótico, necesitábamos calcular el determinante de la matriz inversa obtenida a partir de la matriz jacobiana (que es la matriz de transformación total). Sin embargo, existen puntos donde el jacobiano no tiene inversa, es decir, corresponden a puntos singulares. Además, las singularidades se estudian en dos partes para el brazo, estas son las singularidades en la base del brazo y en el efector final.

Para el cálculo de la inversa de la matriz Jacobiana, se ocupó el programa MatLab por la dificultad de obtenerlo manualmente, ya que son resultados extremadamente grandes, con el programa matemático se obtiene una ecuación del determinante inverso, pero como es

extenso se omite aquí, pero a partir de ésta se van combinando los ángulos θ_1 hasta θ_6 , en esas combinaciones nos debe dar el resultado de $-0,0044$ que es el resultado obtenido en MatLab.

Al realizar esas operaciones, como se mencionó anteriormente aparecen puntos no la matriz se anula y estos son los puntos singulares que son los siguientes:

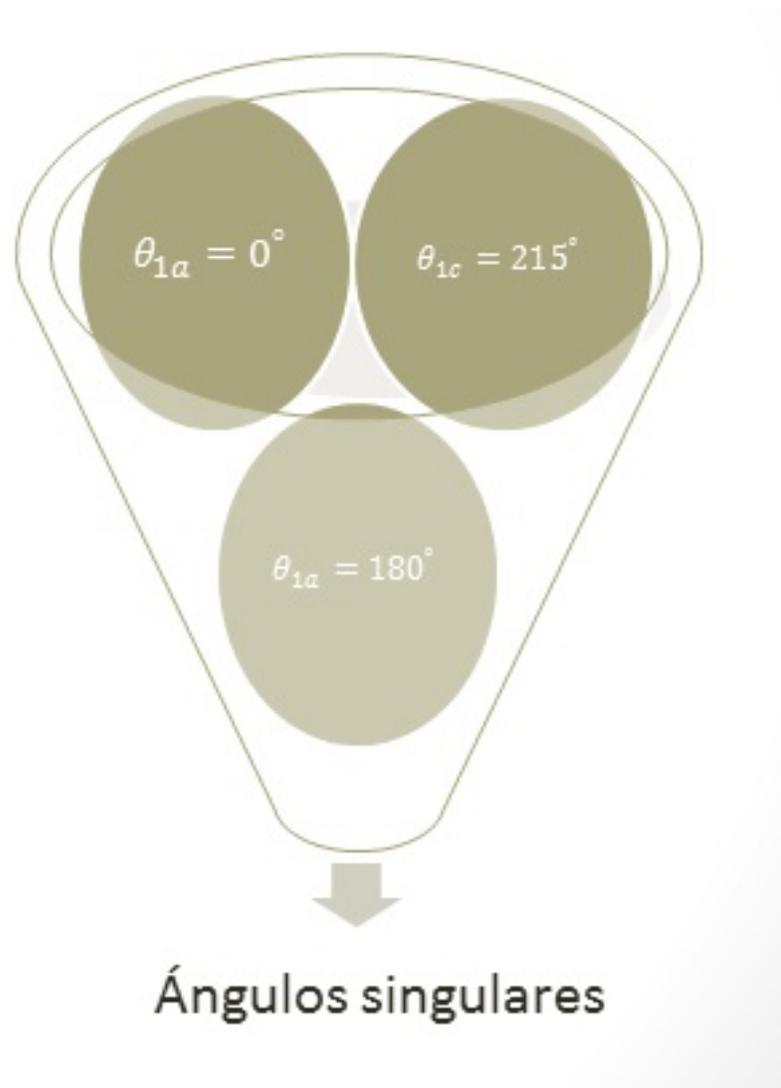


Figura 4.1: *Ángulos singulares obtenidos.*

En estos ángulos, el determinante de la inversa de la matriz jacobiana se elimina, es decir, son los puntos singulares.

En el primer resultado que tiene el valor $\theta = 0^\circ$ corresponde a la posición inicial, al igual que el ángulo $\theta = 180^\circ$, para el ángulo $\theta = 215^\circ$ es cuando el efector final tiende a trabarse.

4.1.3. Error existente entre cada movimiento de los eslabones

Como se explica en el capítulo anterior es muy importante saber los errores existentes en los eslabones al salir de reposo, es decir saber el tiempo de respuesta del brazo ya que, para que el brazo manipule objetos necesita de una programación en el campo de visión artificial, por tanto el tiempo de respuesta es muy importante, ya que ponerle ojos a un robot va de la mano con el accionamiento preciso del brazo”, estudiándolo matemáticamente.

Este procedimiento tiene un coste computacional muy alto, por eso solo se calculan los valores mediante MatLab que se expusieron en el capítulo anterior, para tomarlos en cuenta en el diseño de un brazo con las bases mencionadas en este libro de tesis.

4.1.4. Consideraciones finales

En el desarrollo de este libro se calculan errores en el diseño del brazo robótico Fanuc200ib que no fueron consideradas a la hora de su programación, como son las singularidades, puesto que estos errores se presentan ya cuando el equipo está funcionando y puede que el resultado no sea el esperado para la manipulación de objetos, por lo tanto con todo lo que se desarrolló a lo largo de este libro se llegan a las siguientes conclusiones:

- Importante tomar en cuenta la presencia de singularidades a partir del diseño de un brazo robótico, independientemente de los grados de libertad que éste tenga.
- Delimitar el área de trabajo y poner restricciones en los puntos singulares encontrados a la hora de la programación.
- Los movimientos óptimos de un brazo debe ir a la par el diseño del brazo con la programación y delimitación de un espacio.

Bibliografía

- [1] Y. SHIRAI AND H. INOUE *Guiding a robot by visual feedback in assembling task. Pattern Recognition*, 5:99-108, 1973
- [2] PIEPER, D. L. *The kinematics of manipulators under computer control*, PhD Dissertation, Stanford University, (1968)
- [3] CHIRIKJIAN, G.S. *Kinematics synthesis of mechanisms and robotic manipulators with binary actuators*, ASME J. Mech. Design, vol. 117 (1995) 573-580
- [4] EBERT-UPHOFF, I. AND CHIRIKJIAN, G. S. *Efficient workspace generation for binary manipulators with many actuators*, J. Robotic systems, vol. 12, no. 6, 383-400 (1995)
- [5] KYATKIN, A. B. AND CHIRIKJIAN, G.S. *Synthesis of binary manipulators using the Fourier transform on the Euclidean group*, ASME J. Mech. Design, vol. 121 (1999) 9-14
- [6] DONALD, B. *Algorithms in Structural Molecular Biology*, The MIT Press (2011)
- [7] JOSÉ L. GONZÁLEZ, JAVIER P. TURIEL, JUAN C. FRAILE, DAVID DE LA FUENTE *Modelado cinemático de un manipulador binario hiper-redundante para aplicaciones en cirugía mínimamente invasiva (MIS)*, Instituto Universitario ITAP, Universidad de Valladolid, 2014
- [8] MUÑOZ GONZÁLEZ SAMUEL, GONZÁLEZ SÁNCHEZ JOSÉ LUIS, HERREROS LÓPEZ, ALBERTO *Análisis de la cinemática inversa y minimización de errores mediante algoritmos de optimización para un robot hiper-redundante*, Universidad de Valladolid, Escuela de ingenieros industriales, 2013.
- [9] CHANG HERRERA, ANDRÉS NIKOLAS *Diseño y simulación de un robot articular con seis grados de libertad utilizando el Toolbox Robotics de Matlab para fortalecer las clases teóricas realizando prácticas de laboratorio con el software presentado en este proyecto*, Escuela politécnica nacional, Agosto 2014
- [10] MENA GUEVARA JOSÉ GABRIEL, RIVAS L. DAVID R. *Diseño y construcción de la estructura de un brazo robótico con seis grados de libertad, aplicando ingeniería inversa para la universidad de las fuerzas armadas .^{ES}PE.^{extensión} Latacunga*, Universidad de las fuerzas armadas, Agosto 2014.
- [11] BARRIENTOS A. *Fundamentos de robótica*, Madrid España: Mc GRAW HILL, 2007.

- [12] OLLERO A. *Manipuladores y robots móviles*, Barcelona:MARCOMBO, 2001.
- [13] CRAIG JHON *Introduction to Robotics*, New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2005.
- [14] ARENAS, M., BILBAO. A., RODRÍGUEZ, V. *Solving the Multiobjective Possibilistic Linear Programming Problem*, European Journal of Operational Research, en prensa, 1998.
- [15] CAGNINA, LETICIA CECILIA, ESQUIVEL SUSANA C. *Optimización mono y multiobjetivo a traves de una heurística de inteligencia colectiva*, Universidad Nacional de San Luis, 2010.
- [16] MALDONADO MENDOZA, ANGEL FRANCISCO *Manipulación visual de objetos con un brazo articulado mediante la técnica de visual-servoing*, Universidad de Guanajuato, 2010.