



UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

---

---

CAMPUS IRAPUATO-SALAMANCA  
DIVISIÓN DE INGENIERÍAS

**“APLICACIÓN DEL CÁLCULO  
FRACCIONARIO AL MODELADO  
DE SISTEMAS EN INGENIERÍA  
ELÉCTRICA”**

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
*DOCTOR EN INGENIERÍA ELÉCTRICA*

PRESENTA:

**M. EN I. LEONARDO MARTÍNEZ JIMÉNEZ**

DIRECTORES:

**DR. J. JUAN ROSALES GARCÍA  
DR. DUMITRU BALEANU**

SALAMANCA, GTO.

JUNIO, 2018

**APLICACIÓN DEL CÁLCULO  
FRACCIONARIO AL MODELADO DE  
SISTEMAS EN INGENIERÍA  
ELÉCTRICA**

Por

**M. en I. Leonardo Martínez Jiménez**

Directores

**Dr. J. Juan Rosales García**

**Dr. Dumitru Baleanu**

Tesis que para obtener el grado de  
**DOCTOR EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

Presenta en la  
UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO  
CAMPUS IRAPUATO-SALAMANCA  
DIVISIÓN DE INGENIERÍAS

Salamanca, Gto.

Junio, 2018

# UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

CAMPUS IRAPUATO-SALAMANCA

DIVISIÓN DE INGENIERÍAS

Este trabajo ha sido aprobado por:

Directores:

---

Dr. J. Juan Rosales García

---

Dr. Dumitru Baleanu

Sinodales:

---

Dr. Juan Gabriel Aviña Cervantes

---

Dr. José Merced Lozano García

---

Dr. Haret C. Rosu

---

Dr. Francisco Antonio Godínez Rojano

Fecha: Junio, 2018

# *Aplicación del cálculo fraccionario al modelado de sistemas en ingeniería eléctrica*

Por

**M. en I. Leonardo Martínez Jiménez**

Dr. J. Juan Rosales García,

Dr. Dumitru Baleanu

Directores

Universidad de Guanajuato, DICIS

Junio, 2018

## **Resumen**

*En este trabajo de tesis se proponen nuevos modelos por medio de cálculo fraccionario para describir sistemas pertenecientes a la ingeniería eléctrica. Los modelos encontrados cuentan con grados de libertad adicionales que son obtenidos al resolver ecuaciones diferenciales de orden fraccionario y que permiten conocer información inherente a los procesos físicos que es imposible describir en los modelos tradicionales representados por ecuaciones diferenciales de orden entero. Además, se proponen alternativas para el mejoramiento de algoritmos de procesamiento de imágenes.*

**Palabras Clave** – *Cálculo Fraccionario, modelo de Drude, circuito eléctrico RLC, matriz Hessiana, angiograma de coronaria.*

# *Application of Fractional Calculus in the Modeling of Systems in Electrical Engineering*

By

**M. en I. Leonardo Martínez Jiménez**

Dr. J. Juan Rosales García,

Dr. Dumitru Baleanu

Advisors

University of Guanajuato, DICIS

Agosto, 2018

## **Abstract**

*In this dissertation work, new models to describe electrical engineering systems by means of fractional calculus are being proposed. Models found have more degrees of freedom which are obtained by solving fractional-order differential equations, thus allowing to know information regarding to physical processes which are impossible to describe with traditional models represented by entire-order differential equations. Moreover, alternatives for the improvement of image processing algorithms are proposed.*

**Keywords** – *Fractional Calculus, Drude model, RLC electrical circuit, Hessian matrix, coronary angiogram.*

# *Agradecimientos...*

A **DIOS** porque me ha dado el regalo más grande, mis padres. Porque me ha permitido llegar hasta donde estoy.

A mis padres **Cristina** y **Eduardo**. Porque con los años he aprendido a valorar su grandeza y amor incondicional.

A mis hermanos: **Eduardo, Oswaldo, Sandra, Daniel** y **Cristina** y a toda mi familia. Porque parte de su esfuerzo también está aquí y siempre cuento con ustedes.

A mis amigos que aún en la tormenta se quedaron. **Patricia, Adán, Stephanie, Iván**.

A mis directores de tesis. **Dr. J. Juan Rosales García** y **Dr. Dumitru Baleanu**. Por creer en mí y permitirme trabajar con ustedes.

A los Doctores **Roberto Rojas Laguna** y **Everardo Vargas Rodríguez**, por su apoyo.

A mis profesores, compañeros y colaboradores en el doctorado.

*Leonardo*

# Agradecimientos



Campus Irapuato-Salamanca | División de Ingenierías

A la división de ingenierías del Campus Irapuato-Salamanca de la Universidad de Guanajuato, que puso a mi disposición todos los recursos y medios necesarios para continuar mis estudios y desarrollar mi trabajo de Tesis.



Campus Irapuato-Salamanca | División de Ingenierías  
Departamento de Estudios Multidisciplinarios

Al Departamento de Estudios Multidisciplinarios por permitirme trabajar en este proyecto.



# Índice general

Índice de tablas	XI
Índice de figuras	XII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Justificación . . . . .	3
1.3. Objetivo . . . . .	4
1.4. Plan de la obra . . . . .	4
<b>2. El cálculo fraccionario</b>	<b>5</b>
2.1. Breve historia . . . . .	6

2.2. Funciones utilizadas en el CF . . . . .	9
2.2.1. Función Gamma . . . . .	9
2.2.2. Función Mittag-Leffler . . . . .	10
2.3. Operadores fraccionarios . . . . .	11
2.3.1. Derivada fraccionaria Grünwald-Letnikov . . . . .	11
2.3.2. Integral de Riemann-Liouville . . . . .	12
2.3.3. Derivada de Riemann-Liouville . . . . .	13
2.3.4. Derivada fraccionaria de Caputo . . . . .	15
2.3.5. Derivada Fraccionaria Caputo-Fabrizio . . . . .	15
2.3.6. Integral fraccionaria Caputo-Fabrizio . . . . .	16
2.3.7. Derivada Atangana-Baleanu . . . . .	16
2.3.8. Derivada Fraccionaria Conformable . . . . .	17
2.4. Requisitos de un operador fraccionario . . . . .	18
2.5. Conclusiones . . . . .	19

**3. Casos de Estudio** **20**

3.1. Aplicaciones prácticas . . . . .	21
3.2. Modelo fraccionario de Drude . . . . .	21
3.2.1. Modelos fraccionarios de Drude con <i>kernel</i> no singular . . . . .	25
3.2.2. Resultados . . . . .	29
3.2.3. Conclusiones . . . . .	37
3.3. Circuitos eléctricos de orden fraccionario . . . . .	38
3.3.1. Circuito RC fraccionario . . . . .	39
3.3.2. Circuito RC con la derivada conformable . . . . .	40
3.3.3. Circuito LC con derivada conformable . . . . .	43
3.3.4. Circuito RLC con derivada conformable . . . . .	45
3.3.5. Conclusiones . . . . .	49
3.4. Realzado de vasos sanguíneos . . . . .	49
3.4.1. Algoritmo de Frangi . . . . .	51
3.4.2. Hessiana de orden fraccionario . . . . .	52
3.4.3. Resultados . . . . .	53

3.4.4. Conclusiones . . . . .	58
<b>4. Conclusiones y perspectivas</b>	<b>59</b>
<b>A. Productos Científicos y trabajos presentados</b>	<b>62</b>
<b>Referencias</b>	<b>69</b>

# Índice de tablas

3.1. Resultados del área bajo la curva ROC, usando ordenes de derivación fraccionaria $\varphi$ , aplicada a algunos angiogramas. . . . .	54
---	----

# Índice de figuras

3.1. Gráficas de la densidad de corriente $j(\bar{t})$ utilizando diferentes campos eléctricos. . . . .	23
3.2. Gráficas de las soluciones $j(\bar{t}; \gamma)$ usando diferentes operadores diferenciales fraccionarios, $0 < \gamma \leq 1$ y un campo eléctrico constante $E_0$ . . .	31
3.3. Gráficas de las soluciones $j(\bar{t}; \gamma)$ usando diferentes operadores diferenciales fraccionarios, $0 < \gamma \leq 1$ y un campo eléctrico $E_0\delta(\bar{t})$ . . . . .	32
3.4. Gráficas de las soluciones $j(\bar{t}; \gamma)$ usando diferentes operadores diferenciales fraccionarios, $0 < \gamma \leq 1$ y un campo eléctrico oscilatorio $E_0 \cos \omega\tau\bar{t}$ . 33	
3.5. Variación de la densidad de corriente $j(\bar{t}; \gamma)$ cuando se utiliza un campo eléctrico constante $E_0$ , con las derivadas fraccionarias de Caputo, DCF y ABC, usando valores específicos de $\gamma$ . . . . .	34
3.6. Variación de la densidad de corriente $j(\bar{t}; \gamma)$ cuando se utiliza un campo eléctrico $E_0\delta(\bar{t})$ , con las derivadas fraccionarias de Caputo, DCF y ABC, usando valores específicos de $\gamma$ . . . . .	35

3.7. Variación de la densidad de corriente $j(\bar{t}; \gamma)$ cuando se utiliza un campo eléctrico oscilatorio $E_0 \cos \omega \tau \bar{t}$ , con las derivadas fraccionarias de Caputo, DCF y ABC, usando valores específicos de $\gamma$ . . . . .	36
3.8. Las gráficas muestran las diferencias entre los operadores diferenciales Caputo, DCF y ABC, para un campo eléctrico constante y algunos valores de $\gamma$ . . . . .	37
3.9. Diagrama de un circuito eléctrico RLC. . . . .	39
3.10. Simulación numérica de la ecuación (3.51) para algunos valores de $\gamma$ en el circuito RC con fuente constante. . . . .	41
3.11. (a) Gráficas de las ecuaciones (3.43), (3.51) y (3.52) para algunos valores de $\gamma$ : 1, 0.7 y 0.5. en (b) se muestra la gráfica de la diferencia entre la solución con derivada conformable y Caputo del circuito RC para los mismos valores de $\gamma$ . . . . .	42
3.12. Gráfica de la solución del circuito RC con una fuente externa oscilatoria, con $0 < \gamma \leq 1$ . . . . .	43
3.13. Gráficas correspondientes a la ecuación 3.57 para diferentes valores de $\gamma$ . En (a) y en (b) se observa que cuando $\gamma < 1$ , las amplitudes crecen, además tienen un cambio de fase con respecto a la solución ordinaria. . . . .	44
3.14. Gráficas correspondientes a la ecuación (3.58) para el circuito LC con fuente externa oscilante, para algunos valores de $\gamma$ . En (a) y (b) se puede observar el que el comportamiento es similar al caso sin fuente externa pero la amplitud es mayor. . . . .	45

3.15. Gráficas correspondientes a la solución de la ecuación diferencial conformable del circuito RLC sin fuente externa (3.59), para algunos valores de $\gamma$ . En (a) se muestra que si $0 < \zeta < 1$ el sistema muestra un comportamiento oscilatorio subamortiguado. En (b) si $\zeta = 1$ el sistema es críticamente amortiguado. En (c) cuando $\zeta > 1$ , es un sistema sobreamortiguado y la función decrece de manera exponencial. . . . .	47
3.16. Gráficas correspondientes a la solución del circuito RLC con fuente externas oscilante 3.60), para algunos valores de $\gamma$ . (a) un sistema subamortiguado $\zeta < 1$ . (b) para $\zeta = 1$ un sistema críticamente amortiguado. (c) circuito sobre amortiguado. . . . .	48
3.17. Angiogramas originales y su correspondiente imagen <i>ground-truth</i> . . .	55
3.18. Imágenes resultantes de realzado de vasos sanguíneos usando la matriz Hessiana fraccionaria de orden $\varphi \geq 0$ . Cuando $\varphi = 0$ se obtiene la solución ordinaria (a). . . . .	56
3.19. Gráficas de las Curvas ROC para diferentes valores de $\varphi$ y las áreas encontradas. . . . .	57



# Capítulo 1

## Introducción

*Claro que nosotros, como sabemos comprender la vida,  
nos burlamos tranquilamente de los números. A mí me  
habría gustado empezar esta historia a la manera de los  
cuentos de hadas.*

*El principito*

*Antoine de Saint-Exupéry*

### 1.1. Motivación

La necesidad de encontrar herramientas que permitan proponer modelos más precisos de sistemas: físicos, químicos o de ingeniería, por mencionar algunos, ha obligado a explorar métodos que anteriormente habían sido considerados solo “curiosidades matemáticas”. Por eso a partir de los años 70’s, comenzó el redescubrimiento de una rama del análisis matemático llamada “Cálculo Fraccionario” que hasta entonces había sido poco explorada.

El cálculo fraccionario (CF) consiste en el estudio de los operadores de derivación e integración de ordenes arbitrarios, sobre el dominio de funciones reales o complejas y su origen se remonta al siglo XVII, su desarrollo ha sido progresivo y en general más lento que el del cálculo convencional. A lo largo de estos años han aparecido diversas definiciones de derivada fraccionaria, cuyo propósito ha sido el de generalizar el concepto de derivada, sin embargo, algo que tienen en común es que todas convergen a la definición de derivada tradicional cuando el orden arbitrario vuelve a ser un valor entero, por ejemplo, dado un operador fraccionario  $D_t^\alpha$  donde  $\alpha$  es el orden de derivación, sí  $\alpha = 1$ , entonces  $D_t^\alpha = \frac{d}{dt}$ . Lo mismo sucede en el caso de la integración fraccionaria.

El utilizar derivadas de orden no entero ha tenido como consecuencia algunos problemas que hasta el día de hoy se consideran abiertos: no existe un consenso en cuanto a la interpretación física o geométrica de la derivada fraccionaria, la ley de índices no siempre se cumple, no siempre se puede obtener la derivada del producto, la regla de la cadena no se puede aplicar de manera directa en todos los operadores fraccionarios. Además, las derivadas de orden entero son operadores locales, mientras que las derivadas fraccionarias, en términos generales son operadores no-locales, es decir, las derivadas fraccionarias dependen de todos los valores que conforman el fenómeno. Muchos sistemas dinámicos de orden superior y fenómenos complejos no lineales pueden ser representados utilizando un menor número de coeficientes [1]-[3], dado que el orden fraccionario de la derivada le da un grado de libertad adicional que permite ajustarse a un comportamiento específico [4].

Otra característica es que las derivadas fraccionarias dependen del dominio y las condiciones de contorno. Es decir, las derivadas de orden entero son operadores locales y se definen con valores de vecindad próximos, sin embargo, la derivada fraccionaria en un punto  $x$  no está determinada por valores de vecindad próximos, sino por los valores de vecindad de largo alcance. Esto sirve en sistemas donde se tiene memoria a

largo plazo y los valores en cualquier punto dependen de un amplio rango de valores a lo largo del fenómeno. Por este motivo es vigente la necesidad de encontrar nuevos modelos para describir fenómenos, en las ciencias e ingeniería utilizando las derivadas e integrales fraccionarias que han resurgido.

## 1.2. Justificación

En los últimos años el cálculo fraccionario ha demostrado ser una poderosa herramienta para el modelado de sistemas y múltiples modelos han sido propuestos utilizando operadores fraccionarios.

En este sentido, el CF se presenta como una interesante alternativa para describir con mejor exactitud fenómenos presentes en la ingeniería eléctrica, en especial en modelos como el de Drude, el cual describe la forma en la que los electrones se mueven dentro de un metal al ser estimulados por un campo eléctrico.

Los circuitos eléctricos RLC y RC, por ejemplo, son básicos en el diseño de filtros analógicos, sirven para modelar líneas de transmisión, modelos de impedancia en tejidos biológicos, etc. Dichos circuitos han sido descritos por medio de operadores fraccionarios de tipo Caputo. Sin embargo, en los últimos años surgió una definición de derivada fraccionaria basada en la definición básica del límite de una razón.

Por otro lado, las derivadas fraccionarias han sido utilizadas en procesamiento de imágenes en detección de bordes y realzado de texturas, sin embargo, se puede probar su aplicación en tareas de realzado de estructuras vasculares, modificando la matriz Hessiana y por consecuencia sus respectivos eigenvalores.

### 1.3. Objetivo

El objetivo principal de este proyecto es utilizar el CF como herramienta para proponer modelos alternativos para describir fenómenos presentes en la ciencia y en la ingeniería eléctrica y desarrollar nuevos algoritmos en procesamiento de imágenes. En particular, analizaremos:

- el comportamiento de los electrones en un material metálico con la presencia de un campo eléctrico por medio de derivadas fraccionarias.
- el comportamiento de circuitos eléctricos mediante nuevas definiciones de derivadas fraccionarias.
- la aplicación de derivadas fraccionarias para el desarrollo de herramientas para tareas de visión y procesamiento de imágenes.

### 1.4. Plan de la obra

En el Capítulo 2 se hace una descripción de las características más importantes del CF y algunas definiciones de derivadas e integrales fraccionarias. En el Capítulo 3 se presentan los casos analizados de modelos fraccionarios de ciencias e ingeniería eléctrica. En el Capítulo 4 se presentan las conclusiones y posibles investigaciones futuras y finalmente en el apéndice A se presentan los productos obtenidos de este proyecto.

# Capítulo 2

## El cálculo fraccionario

*A los mayores les gustan mucho las cifras. Cuando se les habla de un nuevo amigo, jamás preguntan cosas esenciales como: “¿Qué tono tiene su voz? ¿Qué juegos prefiere? o ¿Si le gusta o no coleccionar mariposas?” En cambio preguntan: “¿Qué edad tiene? ¿Cuántos hermanos tiene? ¿Cuanto pesa? ¿Cuanto gana su padre?” Solamente con estos detalles creen conocerle.  
El principito*

*Antoine de Saint-Exupéry*

En el capítulo anterior se discutió la necesidad de encontrar nuevas herramientas matemáticas para la construcción de modelos capaces de describir con mayor exactitud fenómenos presentes en las ciencias y la ingeniería. A continuación se realizará una breve semblanza de lo que ha sido el desarrollo del CF a lo largo de su historia, se presentarán algunas funciones cuyo uso es frecuente en la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias, se mostrarán algunas definiciones de operadores fraccionarios utilizados en este proyecto de tesis, se describirán las características más importantes que debe tener un operador fraccionario y, finalmente se mencionarán algunos

ejemplos de aplicaciones actuales del CF en diferentes áreas de conocimiento.

## 2.1. Breve historia

El CF es una disciplina matemática de más de 300 años de antigüedad, apareció solo un tiempo después que fueron publicados los primeros estudios sobre cálculo diferencial e integral. En 1675 Leibniz presentó la notación

$$\frac{d^n y}{dx^n},$$

para referirse a la  $n$ -ésima derivada de la función  $y$ , donde  $n$  es un entero positivo. Posteriormente, en 1695 y debido a la inquietud que provocó dicha notación Leibniz recibió una carta de L'Hôpital [5], en esa carta preguntaba: Qué pasaría si  $n$  fuera  $1/2$  la respuesta de Leibniz fue profética y se considera el génesis del cálculo fraccionario: “... , esto conduciría a una paradoja de la que algún día se extraerán consecuencias útiles”.

Varios matemáticos mencionaron la posibilidad de utilizar ordenes arbitrarios: Euler, Laplace, Fourier, entre otros. Por ejemplo, Leibniz le envió una carta a J. Wallis [6], donde le comentó que él podría calcular su producto infinito (el producto de Wallis <sup>1</sup> [7]) para  $\pi$  utilizando derivadas de orden  $1/2$ . En 1819 Lacroix propuso como un ejercicio matemático el cálculo de la  $n$ -ésima derivada de la función  $y = x^m$  [8],

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n. \quad (2.1)$$

Para poder utilizar un valor arbitrario  $q$ , Lacroix usó la función Gamma propuesta por Legendre para expresar el factorial de un número no entero.

$$\frac{d^q y}{dx^q} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-q+1)} x^{m-q}. \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>John Wallis en 1655 expresó  $\pi$  por medio del producto  $\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)(2k)}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots$

La solución de algunos operadores diferenciales fraccionarios para polinomios converge a esta fórmula por lo que todavía es de uso frecuente. En 1822 Fourier presentó una definición de derivada para un orden arbitrario  $\alpha$  para una función  $f$  [9], sin embargo la fórmula nunca fue utilizada

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} u^\alpha \cos(ut - u\tau + \alpha\pi/2) du, \quad (2.3)$$

válida para cualquier  $\alpha$  positiva o negativa. La primera persona que encontró un uso práctico para el CF fue Niels Henrik Abel, en 1823 aplicó el CF para resolver una integral que surgió en la solución de la curva tautócrona [10]. Este problema consiste en encontrar la forma de la curva  $f(t)$  sobre un plano vertical de tal forma que un objeto se deslice sin rozamiento y que, no importando la posición inicial del objeto sobre la curva, el tiempo para llegar al final del recorrido sea siempre el mismo. Abel partió de la siguiente ecuación conocida ahora como integral de Abel [7].

$$k = \int_0^x (x-t)^{1/2} f(t) dt. \quad (2.4)$$

La ecuación de Abel es un caso especial de las integrales que tienen el *kernel*<sup>2</sup> de la forma  $(x-t)^\alpha$ , en este caso  $\alpha = 1/2$ . En estas ecuaciones integrales la función  $f(t)$  es desconocida y tiene que ser determinada. Abel encontró la solución aplicando un operador diferencial de orden  $1/2$ .

Inspirado por los resultados de Abel y basándose en la integral de Fourier, Joseph Liouville realizó la primera definición formal de derivada fraccionaria en la publicación de sus memorias en 1832 y 1855 [11, 12]. La definición se basó en una extensión natural de la derivada de una función tipo exponencial

$$\frac{d^m}{dx^m} e^{ax} = a^m e^{ax}, \quad (2.5)$$

cambiando  $m$  por un valor arbitrario  $\nu$

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} e^{ax} = a^\nu e^{ax}, \quad (2.6)$$

---

<sup>2</sup>Aunque en castellano la palabra equivalente es núcleo, dada la gran cantidad de bibliografía que maneja el termino como *kernel*, se ha decidido utilizar la palabra directamente en lugar de su traducción.

desarrollando  $f(x)$  como una serie de la forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x}, \operatorname{Re}(a_k) > 0, \quad (2.7)$$

entonces la derivada  $\nu$ -ésima se puede expresar como

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^\nu e^{a_k x}. \quad (2.8)$$

La ecuación (2.8) se conoce como la primera definición de Liouville para derivada fraccionaria sin embargo, debido a la convergencia, tiene la desventaja de estar restringida para ciertos valores de  $x$ .

En 1847 Riemann obtuvo una definición de integral de orden arbitrario utilizando una expansión en series de Taylor sin embargo, su trabajo fue publicado de forma póstuma hasta 1892

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x - \tau) u(\tau) d\tau + \psi(x), \quad (2.9)$$

donde  $\alpha > 0$  es el orden arbitrario de la integral y  $\psi(x)$  es una función complementaria de naturaleza indeterminada.

A partir de estos trabajos se realizaron investigaciones basadas en la integral de Cauchy, hasta llegar a la que se conoce como integral de Riemann-Liouville (1870-1884). Además, los operadores se estudiaron desde el punto de vista de la definición de la derivada por medio de una razón incremental, que tuvo como resultado la derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov (1867-1868). Ambas definiciones detonaron el desarrollo de nuevas definiciones y de aplicaciones prácticas. En la actualidad se han escrito una gran cantidad de trabajos al respecto [13]-[21], además se han organizado eventos especializados en muchos países, México no ha sido la excepción, desde el año 2012, se ha organizado el *Mexican Workshop on Fractional Calculus* fundado por el Dr. Rosales y colaboradores.



## 2.2. Funciones utilizadas en el CF

Algunas funciones aparecen de manera recurrente al utilizar operadores fraccionarios, a continuación se describen brevemente.

### 2.2.1. Función Gamma

El factorial de un número entero  $n$  se define como el producto de todos los enteros consecutivos desde 1 hasta  $n$  y se expresa

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots (n - 1) \times n, \quad (2.10)$$

el factorial de cero es  $0! = 1$ . Si se quiere extender la idea a valores que no sean enteros se utiliza la función Gamma definida por la integral [22].

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (2.11)$$

para cualquier  $z \in C$ , tal que  $Re(z) > 0$ , al integrar por partes se tiene una propiedad interesante

$$\Gamma(z) = (z - 1)\Gamma(z - 1), \quad (2.12)$$

cuando se aplica a valores reales enteros tenemos la relación

$$n! = \Gamma(n + 1), \quad (2.13)$$

de esta manera se puede generalizar el concepto del factorial para valores reales o complejos.

### 2.2.2. Función Mittag-Leffler

De la misma forma en que la función exponencial juega un rol fundamental en la solución de muchas ecuaciones diferenciales de orden entero, la función Mittag-Leffler (ML) aparece de manera consistente en la solución de las ecuaciones diferenciales fraccionarias. Fue definida por Gösta Mittag-Leffler en 1903 [23] y estudiadas algunas de sus propiedades [24, 25]

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (2.14)$$

posteriormente, una generalización fue propuesta en 1905 y otras actualizaciones en [26]-[29]. La función

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (2.15)$$

es llamada función ML de dos parámetros. Se puede observar que (2.14) es un caso especial cuando  $\beta = 1$  en la ecuación (2.15). Además, la función exponencial se considera un caso especial de la ML, cuando  $\alpha = 1$ , entonces

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad (2.16)$$

En la actualidad se han seguido haciendo generalizaciones [30]-[32].

Debido a que la transformada de Laplace es ampliamente utilizada en la solución de ecuaciones diferenciales de orden entero y fraccionario la siguiente expresión en términos de ML y su transformada de Laplace son de interés [4],

$$\begin{aligned} t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(at^{\alpha}) &\iff \frac{a^{\alpha - \beta} k!}{(s^{\alpha} - a)^{k+1}}, \\ E_{\alpha,\beta}^{(k)}(at^{\alpha}) &= \frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}} E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

## 2.3. Operadores fraccionarios

### 2.3.1. Derivada fraccionaria Grünwald-Letnikov

En 1832 Liouville fue el primero en buscar una derivada fraccionaria partiendo de la generalización de la razón incremental. Después en 1867 Grünwald y en 1872 Letnikov dieron forma a lo que hoy se conoce como la derivada Grünwald-Letnikov (GL) [13] [33] [34], esta se obtiene partiendo de la definición básica de derivada,  $h$  es el incremento en  $t$ , se puede hacer la fórmula directa

$$\frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}, \quad (2.18)$$

o también puede ser la derivada reversa

$$\frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \quad (2.19)$$

si repetimos el proceso de 2.18 obtenemos la derivada de segundo orden

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)}{h^2}, \quad (2.20)$$

se hace una generalización para el  $n$ -ésimo orden usando la notación de coeficientes binomiales

$$\frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh), \quad (2.21)$$

$n$  y  $k$  son enteros, los coeficientes binomiales están dados por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2.22)$$

Si cambiamos el orden de la derivada por un valor arbitrario  $\alpha$ , obtenemos la expresión

$$\frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh), \quad (2.23)$$

en este caso el coeficiente binomial contiene a  $\alpha \in R$ , entonces el coeficiente se expresa

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + k - 1)}{k!}, \quad (2.24)$$

acotando la serie y reacomodando los coeficientes binomiales en términos de la función Gamma  $\Gamma(\cdot)$  se obtiene la derivada fraccionaria GL de orden  $\alpha$ , donde  $\alpha \in R$

$$\frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\frac{t-\alpha}{h}} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{k! \Gamma(\alpha - k + 1)} f(t - kh), \quad (2.25)$$

del mismo modo se hace el procedimiento para la derivada fraccionaria reversa y se obtiene

$$\frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\frac{t-\alpha}{h}} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{k! \Gamma(\alpha - k + 1)} f(t + kh). \quad (2.26)$$

Estas definiciones se utilizan de manera frecuente debido a la facilidad para ser implementadas en modelos numéricos y algoritmos computacionales.

### 2.3.2. Integral de Riemann-Liouville

Si integramos de manera iterativa  $n$  veces una función  $f(t)$  obtenemos la integral de Cauchy

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.27)$$

Si se quiere hacer una integración de orden arbitrario, se puede usar la integral de Cauchy (2.27) con una modificación: el término  $1/(1-n)!$  se sustituye por  $1/\Gamma(\alpha)$ . El resultado se conoce como la integral fraccionaria de Riemann-Liouville (IRL)

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.28)$$

se pueden considerar tres propiedades [4]:

1. La integral fraccionaria IRL de orden  $\alpha$  se puede expresar como

$$I^\alpha = (\Phi * f)(t),$$

donde  $\Phi(t) = t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$  y su transformada de Laplace es  $1/s^\alpha$ . Si consideramos  $f(t)$  regular a trozos y de orden exponencial, entonces la transformada de Laplace de la integral  $I^\alpha$  está dada por

$$L [I^\alpha f(t)] = F(s)/s^\alpha, \quad (2.29)$$

donde  $F(s)$  es la transformada de  $f(t)$

2. sea  $f \in H^1(a, b)$ <sup>3</sup> se verifica que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} I^\alpha f(t) = f(t),$$

para todo  $t \in [a, b]$

3. Se cumple la propiedad de semigrupo o ley de exponentes. Sea  $f \in H^1(a, b)$ , entonces se verifica que

$$I^\beta I^\alpha f(t) = I^{\alpha+\beta} f(t), \quad \alpha, \beta \in R_+, \quad (2.30)$$

para todo  $t \in [a, b]$ .

### 2.3.3. Derivada de Riemann-Liouville

Para una función  $f(t) \in H^1(a, b)$ . La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville (DRL) de orden  $\alpha \in R_+$  se define como

$$D^\alpha f(t) = [D^n I^{n-\alpha} f] (t), \quad (2.31)$$

donde,  $n - 1 \leq \alpha < n$ . La DRL existe si  $f(t) \in H^n[a, b]$ . Entonces la DRL se expresa como

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}}, \quad (2.32)$$

para  $n - 1 \leq \alpha < n$ . Se distinguen dos propiedades para la DRL [4]

<sup>3</sup>  $H^k(a, b)$ , es el conjunto de todas las funciones  $f$  diferenciables en  $k$ , en el intervalo  $(a, b)$

1. sea  $f \in H^1(a, b)$  se verifica que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} D^\alpha f(t) = f(t),$$

para todo  $t \in [a, b]$ .

2. sea  $f \in H^1(a, b)$  se verifica que

$$D^\alpha I^\alpha f(t) = f(t),$$

para todo  $t \in [a, b]$ .

De las propiedades anteriores se pueden deducir las siguientes características:

- al igual que en el cálculo elemental, el operador DRL es el inverso izquierdo al operador IRL, del mismo orden  $\alpha$ .
- la DRL de una constante es diferente de cero.
- el operador DRL en términos generales no cumple con la propiedad de semi-grupo.

El hecho de que la DRL este definida por un integral, tiene como consecuencia efectos no locales, llamados efectos de memoria. A diferencia de la derivada ordinaria que solo contiene información local [15].

Sea  $D^\alpha f(t)$  donde  $n-1 \leq \alpha < n$ , y  $D^\alpha$  es el operador DRL. Al aplicar la transformada de Laplace se obtiene

$$L[D^\alpha f(t)] = s^\alpha L[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{\alpha-k-1} f(0), \quad (2.33)$$

la transformada de Laplace del operador DRL tiene el inconveniente de que se requieren condiciones iniciales de orden fraccionario [15].

### 2.3.4. Derivada fraccionaria de Caputo

La DRL resultó práctica en aplicaciones puramente matemáticas como: la resolución de algunas ecuaciones diferenciales, definición de algunas funciones, etc. Sin embargo, la dificultad para interpretar las condiciones iniciales de problemas físicos forzó a buscar nuevas alternativas. Por eso en 1971, Michel Caputo propuso la utilización de una variación de la DRL propuesta por Liouville [35]. Esta derivada es parecida a la DRL solo cambia el orden en el que son aplicados los operadores y se define por

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (2.34)$$

donde  $f^{(n)}(\cdot)$  es la derivada de  $n$ -ésimo orden,  $n = 1, 2, \dots \in N$  y  $n-1 < \alpha \leq n$ , sin perder generalidad se puede considerar  $a = 0$ .

La transformada de Laplace de la derivada de Caputo se define como

$$L [{}^C D^\alpha f(t)] = s^\alpha L [f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} D^k f(0). \quad (2.35)$$

La importancia de la transformada de Laplace de la derivada de Caputo radica en el hecho que las condiciones iniciales no contienen términos de derivadas fraccionarias. Eso implica condiciones físicas conocidas, es decir, de orden entero.

### 2.3.5. Derivada Fraccionaria Caputo-Fabrizio

En 2015 se propuso una variación de la derivada de Caputo, se cambió el *kernel*  $(t-\tau)^{-\alpha}$  por la función  $e^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}t}$  y la expresión  $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$  se sustituyó por  $\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}$ . Entonces, para una función  $f \in H^1(a, b)$ ,  $b > a$  y para un orden de derivación  $\alpha$  tal que  $0 < \alpha \leq 1$  y un valor  $a \in [-\infty, t]$ . La derivada CF se define como [36]

$${}^{CF} D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_a^t \dot{f}(\tau) \exp \left[ -\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha} \right] d\tau, \quad (2.36)$$

sin perder generalidad se puede considerar  $a = 0$ , donde  $\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}$  es una función de normalización con la propiedad  $M(0) = M(1) = 1$ . Si  $f(t)$  es una constante la derivada CF es cero. Sin embargo, a diferencia de la derivada de Caputo, el *kernel* no tiene ninguna singularidad en  $t = \tau$ . Se le conoce como derivada Caputo-Fabrizio (DCF). La transformada de Laplace de la DCF definida en  $0 < \alpha \leq 1$  se define como

$$L [{}_a^{CF} D_t^\alpha f(t)] = \frac{sF(s) - f(0)}{s + \alpha(1 - s)}, \quad (2.37)$$

al igual que la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo, la transformada de Laplace de la DCF no tiene condiciones iniciales de orden fraccionario, por lo que se puede utilizar en aplicaciones prácticas, además debido al cambio de *kernel* la DCF no tiene singularidades.

### 2.3.6. Integral fraccionaria Caputo-Fabrizio

En el año 2015. Losada y Nieto presentaron una integral fraccionaria [37], basada en la derivada fraccionaria DCF de orden  $0 < \alpha \leq 1$ ,

$${}^{CF} I_t^\alpha f(t) = \frac{2(1 - \alpha)}{(2 - \alpha)M(\alpha)} f(t) + \frac{2\alpha}{(2 - \alpha)M(\alpha)} \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad (2.38)$$

donde la función de normalización es

$$M(\alpha) = \frac{2}{2 - \alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (2.39)$$

### 2.3.7. Derivada Atangana-Baleanu

En [38, 39] se proponen dos derivadas fraccionarias, su característica es que tienen en su *kernel* la función ML, una de ellas es utilizada en este proyecto y la llamaremos



(ABC):  $f \in H^1(a, b)$ ,  $a < b$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ ,

$${}^{ABC}D^\alpha[f(t)] = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(x) E_\alpha \left[ -\alpha \frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha} \right] dx, \quad (2.40)$$

donde  $E_\alpha(\cdot)$  es la función de ML de un parámetro [15] y su transformada de Laplace está dada por

$$L[{}^{ABC}D^\alpha f(t)] = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \cdot \frac{s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} f(0)}{s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (2.41)$$

donde  $B(\alpha)$  tiene propiedades similares que la DCF. Debido a que la DCF y la ABC son variantes de la derivada de Caputo con *kernel* distinto.

### 2.3.8. Derivada Fraccionaria Conformable

En [42] se presenta una derivada fraccionaria que, a diferencia de los operadores diferenciales fraccionarios típicos como la DRL, Caputo o DCF, no está definida por una integral. En este caso, se usa la definición básica del límite de una razón: dada una función  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ , la derivada fraccionaria conformable de orden  $\alpha$  se define como

$$T_\alpha(f)(t) = \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = f^\alpha(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}, \quad (2.42)$$

para todo  $t > 0$  y  $0 < \alpha \leq 1$ . Cuando  $\alpha = 1$  se puede volver a la definición estandar de derivada. Si  $\alpha = 1$  de (2.42), obtenemos  $f' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\epsilon) - f(t)}{\epsilon}$ . Si  $f$  es  $\alpha$ -diferenciable en  $(0, a)$ ,  $a > 0$ , y  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^\alpha(t)$  existe, entonces se define

$$f^\alpha(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^\alpha(t). \quad (2.43)$$

Las propiedades más importantes de la derivada fraccionaria conformable están dadas por el siguiente teorema:

Dado  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $f$  y  $g$  son  $\alpha$ -diferenciables en  $t > 0$ . Entonces

1.  $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$ , para todo  $a, b \in \mathfrak{R}$ .

2.  $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ , para todo  $p \in \mathfrak{R}$ .
3.  $T_\alpha(\lambda) = 0$ , para toda función constante  $f(t) = \lambda$ .
4.  $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$ .
5.  $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$ .
6.  $T_\alpha(f)(t) = t^{n+1-\alpha} \frac{d^{n+1}f}{dt^{n+1}}$ ,  $\alpha \in [n, n+1]$ . Sí  $f(t)$  es  $(n+1)$ -diferenciable en  $t > 0$ .

Las derivadas fraccionarias definidas por integrales satisfacen de manera deficiente la regla del producto, la regla del cociente, la regla de la cadena y en general no se cumple la regla de los índices. En cambio, la derivada conformable cumple todas ellas, lo cual ha despertado el interés de los investigadores en los últimos años.

## 2.4. Requisitos de un operador fraccionario

Como se ha visto en secciones anteriores a partir del surgimiento del CF, han aparecido diversas definiciones para los operadores derivada e integral de orden fraccionario. Sin embargo, es necesario tener en cuenta las condiciones que debe cumplir un operador para ser considerado, “fraccionario”. En [43] se hace una descripción de las condiciones que deben cumplir los operadores derivada fraccionaria. Dado un operador  $D$ , entonces  $D$  es llamado un operador derivada fraccional, si cumple las siguientes condiciones:

1. Si  $D$  de una función en un valor elegido de entrada, describe la tasa de cambio de la función cercana al valor de entrada.
2.  $D[f]$  de orden cero produce  $f$ .
3.  $D$  es lineal, es decir:  $D[af(t) + bg(t)] = aD[f] + bD[g]$
4.  $D$  satisface la regla del factor constante, es decir:  $D[af(t)] = aD[f(t)]$

5.  $D$  Satisface la regla de la suma, es decir:  $D[f + g] = D[f] + D[g]$
6.  $D$  Satisface la regla de la sustracción:  $D[f - g] = D[f] - D[g]$

Debido a que es difícil cumplir todas las condiciones, es tema de debate el calificativo de “derivada fraccionaria” en algunos operadores, en [44]-[46] se presentan algunos ejemplos de controversias al respecto. Un análisis más detallado se encuentra fuera de los objetivos del presente trabajo de tesis por lo que se considerarán en general operadores fraccionarios.

## 2.5. Conclusiones

Se realizó una breve recopilación de aportaciones históricas en el campo del CF desde su origen hasta la actualidad, se analizaron las funciones de uso más común en el CF, las definiciones de operadores fraccionarios más utilizadas en la actualidad y su transformadas de Laplace.

Desde la primera alusión a utilizar ordenes de derivacion no enteros, hasta los operadores fraccionarios utilizados en la actualidad, el CF ha tenido una gran evolución, pero a pesar de no existir una interpretación física o geométrica de la derivada fraccionaria, lo que ha catalizado su desarrollo en los últimos años es la capacidad de describir características de fenómenos reales que no pueden ser visualizadas con el cálculo tradicional.

En el siguiente capítulo se describen los proyectos en los que se utilizaron los operadores fraccionarios en este trabajo de tesis y se discuten los resultados obtenidos en cada uno.

# Capítulo 3

## Casos de Estudio

*Afortunadamente para la reputación del asteroide B-612 un dictador turco impuso a su pueblo, bajo pena de muerte, la obligación de vestirse a la europea. El astrónomo volvió a hacer su demostración en 1920 y, con un traje muy elegante. Y esta vez todo el público estuvo de acuerdo con él.*

*El principito*

*Antoine de Saint-Exupéry*

En el capítulo anterior se realizó un estudio de las principales definiciones de operadores fraccionarios y su utilización en el modelado de fenómenos, así como la interpretación de los resultados que se puedan obtener. En este capítulo se hace un compendio de los trabajos de investigación realizados en el modelado de problemas de ingeniería eléctrica con CF y las aportaciones obtenidas en este proyecto de tesis.

### 3.1. Aplicaciones prácticas

Desde el desarrollo de la solución de la curva tautócrona por Abel en 1823, comenzó a utilizarse el CF en aplicaciones prácticas, sin embargo, a partir de la aplicación de la derivada de Caputo en 1967 comenzó una explosión en la cantidad de aplicaciones en una cantidad cada vez mayor de campos de conocimiento como: modelos con mecanismos de memoria [35]; mecánica clásica [48]-[56]; modelos fraccionarios de difusión [57]-[59]; nuevos modelos de capacitor [60]; descripción no-local de dinámica cuántica, como el movimiento Browniano y difusión anómala [61, 62]; comportamiento de materiales viscoelásticos [63]-[68]; fenómenos anómalos no-Gaussianos de transporte [69]; materiales dieléctricos [70]-[73]; fenómenos electromagnéticos y óptica [74]-[80]; procesamiento de señales [81] y de imágenes [82]-[87].

### 3.2. Modelo fraccionario de Drude

El modelo propuesto por Paul Drude en 1900 se conoce como el primer modelo realista para describir metales, a pesar de ser muy simple puede ayudar a explicar propiedades como conductividad eléctrica, conductividad térmica, y algunas propiedades ópticas de los metales [88, 89]. Este modelo considera un metal como un gas ejecutando movimientos de difusión. La ecuación unidimensional que describe el movimiento de una partícula cargada  $e$  con masa  $m$  afectada por un campo eléctrico  $E(t)$  [90] está dada por

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{m}{\tau} v = -eE(t), \quad (3.1)$$

$v$  es la velocidad de movimiento de los electrones. En el lado izquierdo, el primer término representa la aceleración de la carga inducida por el campo eléctrico, el segundo término describe el factor de atenuación debido a la dispersión del electrón y  $\tau$  representa el parámetro de relajación.

Si el campo eléctrico es constante  $E(t) = E_0$  la solución de (3.1) está dada por

$$v(t) = -\frac{eE_0\tau}{m} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]. \quad (3.2)$$

Si el campo eléctrico se define como un pulso descrito por la distribución delta de Dirac  $E(t) = E_0\delta(t)$  [97], la solución de (3.2) es

$$v(t) = -\frac{eE_0\tau}{m} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (3.3)$$

Si el campo eléctrico es oscilatorio se define por  $E(t) = E_0 \cos \omega t$  la solución de (3.1) está dada por

$$v(t) = -\frac{eE_0\tau}{m [1 + (\omega\tau)^2]} \left[ \cos \omega t + \omega\tau \sin \omega t - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]. \quad (3.4)$$

En el modelo de Drude típicamente solo la densidad de corriente  $\vec{j}$ , puede ser medible de manera experimental [91], para relacionarla con la velocidad considere un conductor que cumple la ley de Ohm con un número  $N$  de portadores de carga (electrones) por unidad de volumen que se mueven a una misma velocidad  $v = v(t)$  entonces, la densidad de corriente se define por  $\vec{j} = -eN\vec{v}$ . Si hacemos  $\sigma_0 = \frac{e^2 N \tau}{m}$ , donde  $\sigma_0$  es llamada conductividad estática de Drude, después sustituimos  $\bar{t} = t/\tau$  y obtenemos,

$$j(\bar{t}) = \sigma_0 E_0 v(\bar{t}). \quad (3.5)$$

Para  $E(\bar{t})$  constante tenemos

$$j_{cte}(\bar{t}) = \sigma_0 E_0 [1 - \exp(-\bar{t})]. \quad (3.6)$$

Para  $E(\bar{t})$  definido por un pulso

$$j_{\delta}(\bar{t}) = \sigma_0 E_0 \exp(-\bar{t}). \quad (3.7)$$

Y para un campo eléctrico oscilatorio

$$j_{osc}(\bar{t}) = \frac{\sigma_0 E_0}{[1 + (\omega\tau)^2]} [\cos \omega\tau\bar{t} + \omega\tau \sin \omega\tau\bar{t} - \exp(-\bar{t})]. \quad (3.8)$$

En la Figura 3.1 se muestran las gráficas de la densidad de corriente para los campos eléctricos: constante  $j_{cte}$ , de pulso  $j_{\delta}(\bar{t})$  y oscilatorio  $j_{osc}(\bar{t})$ .

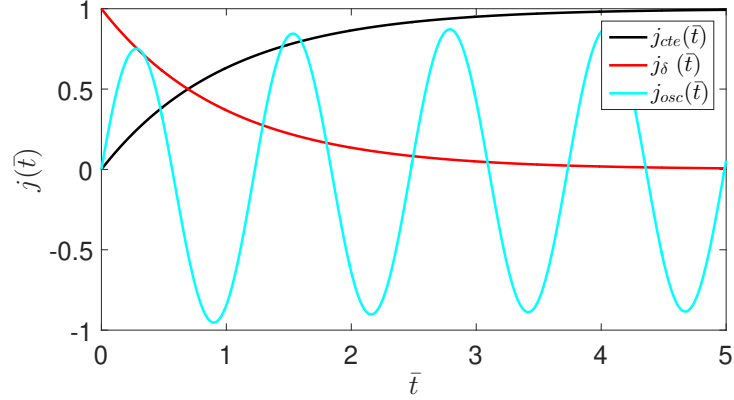


Figura 3.1: Gráficas de la densidad de corriente  $j(\bar{t})$  utilizando diferentes campos eléctricos.

### Modelo de Drude con la derivada de Caputo

Con el objetivo de agregar un nuevo grado de libertad al modelo de Drude en [92] se propuso una ecuación diferencial fraccionaria para describir el movimiento de las cargas en el metal. El orden entero de la ecuación diferencial es sustituido por un orden real,  $0 < \gamma \leq 1$  entonces, el nuevo grado de libertad es dado por el orden fraccionario de la derivada. Para poder manejar las ecuaciones de manera dimensionalmente correcta en este trabajo se utiliza la sustitución:  $u(\bar{t}) = -m/eE_0\tau v(\bar{t})$  y se obtiene

$$\frac{d^\gamma u(\bar{t})}{d\bar{t}^\gamma} + u(\bar{t}) = E(\bar{t}), \quad 0 < \gamma \leq 1. \quad (3.9)$$

El resultado es una ecuación diferencial fraccionaria de orden  $\gamma$ , adimensional. Para resolver la ecuación diferencial fraccionaria se tiene que considerar dos factores: el tipo de operador diferencial fraccionario y el campo eléctrico  $E(t)$ . En este caso se utilizó la derivada fraccionaria de Caputo (2.34) con dos campos eléctricos diferentes.

Evaluando para un campo eléctrico constante  $E(t) = E_0$  se obtiene una ecuación diferencial fraccionaria con el operador diferencial de Caputo

$${}^C D_{\bar{t}}^\gamma u(\bar{t}) + u(\bar{t}) = E_0. \quad (3.10)$$

Para encontrar la solución aplicamos la transformada de Laplace en ambos lados

$$L [{}^C D_{\bar{t}}^\gamma u(\bar{t})] + L [u(\bar{t})] = L [E_0], \quad (3.11)$$

utilizando la fórmula (2.35) para encontrar la transformada de Laplace del operador de Caputo

$$[s^\gamma U(s) - u(0)] + U(s) = \frac{E_0}{s}, \quad (3.12)$$

considerando la condición inicial  $u(0) = 0$  y despejando para  $U(s)$  obtenemos

$$U(s) = \frac{E_0}{s [(\tau s)^\gamma + 1]}, \quad (3.13)$$

aplicando transformada inversa de Laplace en (3.11) y usando (3.5) para encontrar la densidad de corriente se obtiene

$$j(\bar{t}; \gamma) = \sigma_0 E_0 [1 - E_\gamma(-\bar{t}^\gamma)], \quad (3.14)$$

$E_\gamma(\cdot)$  es la función ML, (2.14),  $j(\bar{t}; \gamma)$  es el resultado que depende de  $\bar{t}$  y del orden de la derivada  $\gamma$ . En el caso cuando  $\gamma = 1$  se obtiene la solución ordinaria (3.6).

Si utilizamos el operador diferencial de Caputo y un campo eléctrico oscilatorio  $\cos \omega \tau \bar{t}$ , entonces la ecuación diferencial fraccionaria resulta

$${}^C D_{\bar{t}}^\gamma u(\bar{t}) + u(\bar{t}) = E_0 \cos \omega \tau \bar{t}, \quad 0 < \gamma \leq 1. \quad (3.15)$$

Aplicando transformada de Laplace, haciendo  $u(0) = 0$  y despejando para  $U(s)$  se obtiene

$$U(s) = \frac{s E_0}{[(\tau s)^\gamma + 1] (s^2 + \omega^2)}. \quad (3.16)$$



Se toma la potencia más alta de  $s$  como factor común y se expande en una serie geométrica alterna [95], después se aplica la transformada inversa de Laplace, para obtener la solución de  $v(\bar{t}; \gamma)$ , finalmente se calcula  $j(\bar{t}; \gamma)$

$$j(\bar{t}; \gamma) = \sigma_0 E_0 \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l} (\omega\tau)^{2k}}{\Gamma[\gamma(l+1) + 2k + 1]} (\bar{t})^{\gamma(l+1)+2k}, \quad (3.17)$$

cuando  $\gamma = 1$  se obtiene la solución ordinaria (3.8).

### 3.2.1. Modelos fraccionarios de Drude con *kernel* no singular

En este proyecto se proponen modelos fraccionarios de Drude utilizando operadores sin *kernel* singular, en especial se utilizan: la DCF y la ABC. Con el fin de realizar comparaciones, primero se realizó el análisis del caso en que se utiliza la derivada de Caputo y un campo eléctrico descrito por un impulso  $\delta(t)$ , entonces tenemos

$${}^C D_{\bar{t}}^{\gamma} u(\bar{t}) + u(\bar{t}) = E_0 \delta(\bar{t}), \quad 0 < \gamma \leq 1. \quad (3.18)$$

Aplicando la transformada de Laplace, considerando  $u(0) = 0$  y despejando para  $U(s)$

$$U(s) = \frac{E_0}{s^{\gamma} + 1}, \quad (3.19)$$

aplicando la transformada inversa de Laplace y calculando la densidad de corriente  $j(\bar{t}; \gamma)$

$$j(\bar{t}; \gamma) = \sigma_0 E_0 \bar{t}^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\bar{t}^{\gamma}). \quad (3.20)$$

En el caso cuando  $\gamma = 1$ , obtenemos la solución ordinaria (3.7). Una vez que se tienen los tres casos de campos eléctricos con derivada de Caputo se resuelve la ecuación fraccionaria utilizando los operadores DCF y ABC utilizando los mismos campos eléctricos.

### Modelo de Drude con la derivada Caputo-Fabrizio

Si utilizamos el operador diferencial DCF, podemos revisar el comportamiento del modelo fraccionario de Drude con este operador con los campos eléctricos utilizados anteriormente. En el caso de tener un campo eléctrico constante  $E(t) = E_0$ .

$${}^{CF}D_{\bar{t}}^{\gamma}u(\bar{t}) + u(\bar{t}) = E_0, \quad 0 < \gamma \leq 1. \quad (3.21)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial con el operador de DCF

$$\frac{\bar{s}U(\bar{s}) - u(0)}{\bar{s} + \gamma(1 - \bar{s})} + U(\bar{s}) = \frac{E_0}{\bar{s}}, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad (3.22)$$

donde  $\bar{s} = \tau s$ , si consideramos la condición inicial  $u(0) = 0$ , despejando para  $U(\bar{s})$ , obteniendo la transformada inversa de Laplace. Adicionalmente se calcula la densidad de corriente  $j(\bar{t}; \gamma)$

$$j(\bar{t}; \gamma) = \sigma_0 E_0 \left[ 1 - \frac{1}{2 - \gamma} \exp\left(-\frac{2}{2 - \gamma} \bar{t}\right) \right], \quad (3.23)$$

cuando  $\gamma = 1$  se obtiene la solución ordinaria (3.2).

Si se considera el operador diferencial DCF y un campo eléctrico  $E_0\delta(\bar{t})$  tenemos la ecuación fraccionaria

$${}^{CF}D_{\bar{t}}^{\gamma}u(\bar{t}) + u(\bar{t}) = E_0\delta(\bar{t}), \quad 0 < \gamma \leq 1. \quad (3.24)$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$\frac{\bar{s}U(\bar{s}) - u(0)}{\bar{s} + \gamma(1 - \bar{s})} + U(\bar{s}) = E_0, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad (3.25)$$

donde  $\bar{s} = \tau s$ , si consideramos la condición inicial  $u(0) = 0$ , despejando para  $U(\bar{s})$ , aplicando transformada inversa de Laplace obtenemos la expresión y calculamos la densidad de corriente tenemos

$$j(\bar{t}; \gamma) = \frac{\sigma_0 E_0}{(2 - \gamma)} \left[ (1 - \gamma)\delta(\bar{t}) + \frac{\gamma}{2 - \gamma} \exp\left(-\frac{\gamma}{2 - \gamma} \bar{t}\right) \right], \quad (3.26)$$

cuando  $\gamma = 1$  se obtiene la solución ordinaria (3.7).

Si consideramos la derivada DCF y un campo eléctrico oscilante  $\cos \omega \tau \bar{t}$

$${}^{CF}D_{\bar{t}}^{\gamma}u(\bar{t}) + u(\bar{t}) = E_0 \cos \omega \tau \bar{t}, \quad 0 < \gamma \leq 1. \quad (3.27)$$

Aplicando transformada de Laplace

$$\frac{\bar{s}U(\bar{s}) - u(0)}{\bar{s} + \gamma(1 - \bar{s})} + U(\bar{s}) = \frac{sE_0}{\bar{s}^2 + (\omega\tau)^2}, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad (3.28)$$

donde  $\bar{s} = \tau s$ , si consideramos la condición inicial  $u(0) = 0$ , despejando para  $U(\bar{s})$ , obteniendo la transformada inversa de Laplace y calculando la densidad de corriente  $j(\bar{t}; \gamma)$

$$j(\bar{t}; \gamma) = \frac{\sigma_0 E_0 (2 - \gamma)}{\gamma^2 + (\omega\tau)^2 (2 - \gamma)^2} \left[ A \cos \omega \tau \bar{t} + B \sin \omega \tau \bar{t} + C \exp\left(-\frac{\gamma}{2 - \gamma} \bar{t}\right) \right], \quad (3.29)$$

donde los coeficientes  $A$ ,  $B$  y  $C$  son

$$\begin{aligned} A &= (\omega\tau)^2 (1 - \gamma) + \frac{\gamma^2}{2 - \gamma}, \\ B &= \gamma(\omega\tau) - \frac{\gamma(1 - \gamma)}{\omega\tau}, \\ C &= \frac{\gamma^2}{2 - \gamma} \left( 1 - \gamma - \frac{1}{2 - \gamma} \right), \end{aligned}$$

cuando  $\gamma = 1$ :  $A = 1$ ,  $B = \omega\tau$  y  $C = -1$  entonces, se obtiene la solución ordinaria (3.8).

### Modelo de Drude con la derivada Atangana-Baleanu

Usando el operador diferencial ABC y un campo eléctrico constante  $E(t) = E_0$  se tiene la ecuación diferencial fraccionaria

$${}^{ABC}D_{\bar{t}}^{\gamma}u(\bar{t}) + u(\bar{t}) = E_0, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad (3.30)$$

$\gamma$  es el orden de la ecuación diferencial. Aplicando transformada de Laplace, con  $\bar{s} = \tau s$ , obtenemos

$$\frac{B(\gamma)}{1-\gamma} \cdot \frac{\bar{s}^\gamma U(\bar{s}) - \bar{s}^{\gamma-1} u(0)}{\bar{s}^\gamma + \frac{\gamma}{1-\gamma}} + U(\bar{s}) = \frac{E_0}{\bar{s}}, \quad (3.31)$$

donde  $B(\gamma)$  tiene las mismas propiedades que la  $M(\gamma)$  de la derivada CF (2.36) y en este caso  $\frac{B(\gamma)}{1-\gamma} = 1$ , además se considera la condición inicial  $u(0) = 0$ . Despejando para  $U(\bar{s})$ , aplicando transformada inversa de Laplace y finalmente calculando la densidad de corriente  $j(\bar{t}; \gamma)$ , tenemos

$$j(\bar{t}; \gamma) = \sigma_0 E_0 \left[ 1 - \frac{1}{2-\gamma} E_\gamma \left( -\frac{\gamma}{2-\gamma} \bar{t} \right) \right], \quad (3.32)$$

donde  $E_\gamma(\cdot)$  es la función ML, (2.14). Cuando  $\gamma = 1$  se obtiene la solución ordinaria (3.6).

Si se utiliza el operador diferencial con ABC y un campo eléctrico  $E_0 \delta(\bar{t})$

$${}^{ABC} D_{\bar{t}}^\gamma u(\bar{t}) + u(\bar{t}) = E_0 \delta(\bar{t}), \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad (3.33)$$

aplicando transformada de Laplace, con  $\bar{s} = \tau s$ , obtenemos

$$\frac{B(\gamma)}{1-\gamma} \cdot \frac{\bar{s}^\gamma U(\bar{s}) - \bar{s}^{\gamma-1} u(0)}{\bar{s}^\gamma + \frac{\gamma}{1-\gamma}} + U(\bar{s}) = E_0, \quad (3.34)$$

se consideran las mismas condiciones que para (3.31). Despejando para  $U(\bar{s})$ , aplicando transformada inversa de Laplace y calculando la densidad de corriente  $j(\bar{t}; \gamma)$  tenemos

$$j(\bar{t}; \gamma) = \frac{\sigma_0 E_0}{(2-\gamma)} \cdot \left[ (1-\gamma) \delta(\bar{t}) + \frac{\gamma}{2-\gamma} \bar{t}^{\gamma-1} E_{\gamma,\gamma} \left( -\frac{\gamma}{2-\gamma} \bar{t}^\gamma \right) \right], \quad (3.35)$$

donde  $E_{\gamma,\gamma}(\cdot)$  es la función ML de dos parámetros (2.15). Cuando  $\gamma = 1$  se obtiene la solución ordinaria (3.7).

Si se utiliza el operador diferencial con *kernel* ML, ABC y un campo eléctrico oscilante  $E_0 \cos \omega \tau \bar{t}$

$${}^{ABC} D_{\bar{t}}^\gamma u(\bar{t}) + u(\bar{t}) = E_0 \cos \omega \tau \bar{t}, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad (3.36)$$

aplicando transformada de Laplace, con  $\bar{s} = \tau s$ , entonces obtenemos

$$\frac{B(\gamma)}{1-\gamma} \cdot \frac{\bar{s}^\gamma U(\bar{s}) - \bar{s}^{\gamma-1} u(0)}{\bar{s}^\gamma + \frac{\gamma}{1-\gamma}} + U(\bar{s}) = \frac{\bar{s} E_0}{\bar{s}^2 + (\omega\tau)^2}, \quad (3.37)$$

se consideran las mismas condiciones que para (3.31). Despejando para  $U(\bar{s})$ , aplicando transformada inversa de Laplace y calculando  $j(\bar{t}; \gamma)$  tenemos

$$j(\bar{t}; \gamma) = \sigma_0 E_0 \left[ \frac{1-\gamma}{2-\gamma} A + \frac{\gamma}{1-\gamma} B \right], \quad (3.38)$$

donde  $A$  y  $B$  son:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l} (\omega\tau)^{2k} \gamma^l}{(2-\gamma)^l \Gamma[2k+l\gamma+1]} \bar{t}^{2k+l\gamma}, \\ B &= \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l} (\omega\tau)^{2k} \gamma^l}{(2-\gamma)^l \Gamma[(l+1)\gamma+2k+1]} \bar{t}^{(l+1)\gamma+2k}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

Cuando  $\gamma = 1$  se obtiene la solución ordinaria (3.8).

### 3.2.2. Resultados

Una vez que se tienen las soluciones de la ecuación fraccionaria con los operadores fraccionarios: Caputo, DCF y ABC, y con los campos eléctricos: constante, impulso y oscilatorio. Se pueden comparar directamente las soluciones para cada campo eléctrico usando los tres operadores.

En la Figura 3.2 se puede apreciar el comportamiento de la densidad de corriente  $j(\bar{t}; \gamma)$  cuando se utilizan los tres operadores fraccionarios con diferentes valores de  $\gamma$  tales que  $0 < \gamma \leq 1$ , y un campo eléctrico constante  $E_0$ . En los casos: (a) Caputo, (b) DCF y (c) ABC cuando  $\gamma = 1$  la curva coincide con la solución ordinaria (3.6). La aproximación asintótica para la ecuación (3.23) es: cuando  $\bar{t} \rightarrow 0$  la  $j_{CF}(\bar{t}; \gamma) \rightarrow \sigma_0 E_0 (1 - 1/2 - \gamma)$  y cuando  $\bar{t} \rightarrow \infty$  entonces  $j_{CF}(\bar{t}; \gamma) \rightarrow \sigma_0 E_0$  lo cual concuerda con el caso ordinario, cuando  $\gamma = 1$ .

En el caso de  $j_{ABC}(\bar{t}; \gamma)$  las aproximaciones asintóticas de la función ML para valores de  $\bar{t} \rightarrow 0$  y para  $\bar{t} \rightarrow \infty$ , en la primera aproximación son [96],

$$E_\gamma(-\bar{t}^\gamma) \sim e^{-\frac{\bar{t}^\gamma}{\Gamma(1-\gamma)}}, \quad (3.40)$$

$$E_\gamma(-\bar{t}^\gamma) \sim \frac{\bar{t}^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)}. \quad (3.41)$$

Como consecuencia, la función ML toma valores intermedios de  $\bar{t}$  de una función exponencial y una función de potencias negativas, vease la Figura 3.2 (c). Se observan dos características que cambian debido al operador fraccionario elegido: el valor inicial de  $j(0; \gamma)$  es diferente de cero cuando  $\gamma < 1$ , cuando se usan los operadores DCF y ABC. Además, los puntos donde se cruzan las curvas de diferentes valores de  $\gamma$  varían según el operador: en  $j_C$  es en  $\bar{t} \approx 0.75$ , para  $j_{CF}$  es en  $\bar{t} \approx 0.50$  y para  $j_{ABC}$  es en  $\bar{t} \approx 1.22$ .

En la Figura 3.3 se puede apreciar el comportamiento de la densidad de corriente  $j(\bar{t}; \gamma)$  cuando se utilizan los tres operadores fraccionarios con diferentes valores de  $\gamma$  tales que  $0 < \gamma \leq 1$ , y un campo eléctrico  $\delta(\bar{t})E_0$ . En los casos: (a) Caputo, (b) DCF y (c) ABC. Cuando  $\gamma = 1$  la curva coincide con la solución ordinaria (3.7). La diferencia principal en los tres operadores es la rapidéz con la que las funciones decaen cuando se usan valores  $\gamma < 1$ , tomando como referencia la solución con Caputo,  $j_C(\bar{t}; \gamma)$ , la solución con la DCF,  $j_{CF}(\bar{t}; \gamma)$  decae más lento mientras que las soluciones con ABC,  $j_{ABC}(\bar{t}; \gamma)$  decaen más rápido.

En la Figura 3.4 se puede apreciar el comportamiento de la densidad de corriente  $j(\bar{t}; \gamma)$  cuando se utilizan los tres operadores fraccionarios con diferentes valores de  $\gamma$  tales que  $0 < \gamma \leq 1$ , y un campo eléctrico oscilatorio. En los casos: (a) Caputo, (b) DCF y (c) ABC. Cuando  $\gamma = 1$  la curva coincide con la solución ordinaria (3.8). Se puede ver que cuando se utiliza el operador DCF, tienen un comportamiento exponencial de decaimiento similar al modelo de orden entero. La DCF tiene limitaciones al momento de caracterizar fenómenos de difusión anómala de naturaleza no exponencial

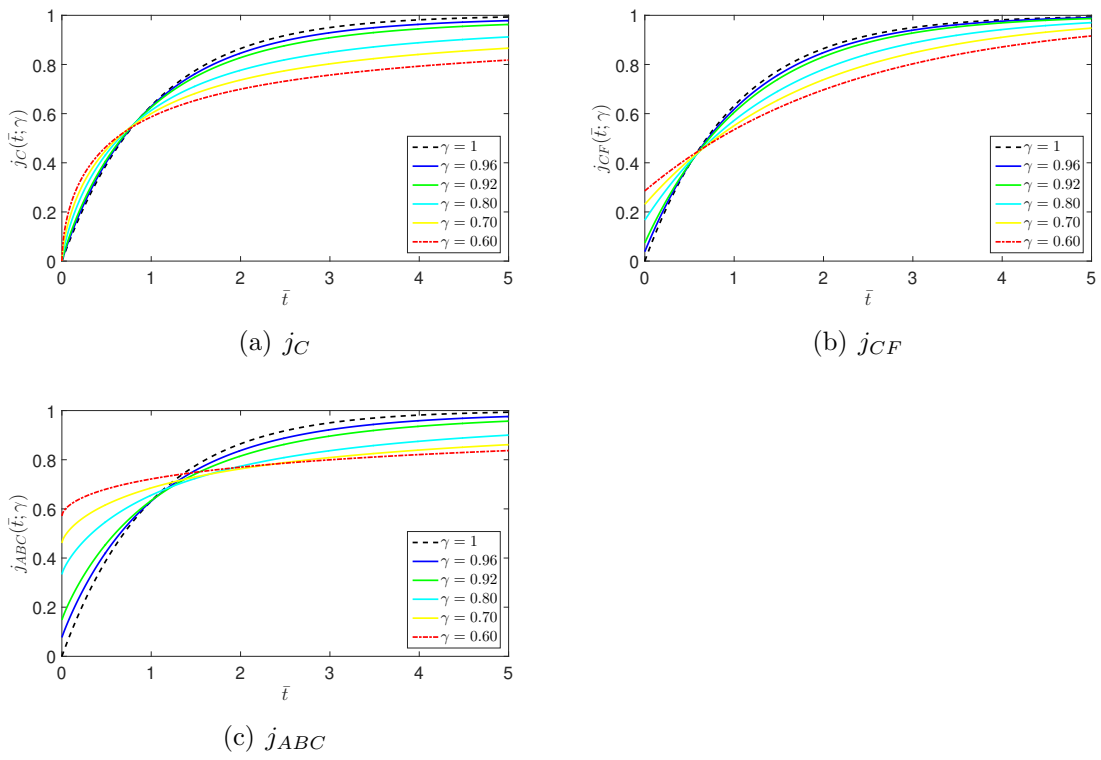
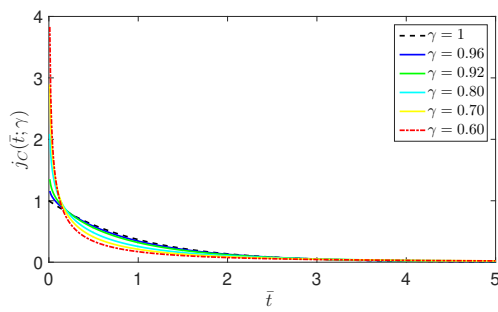
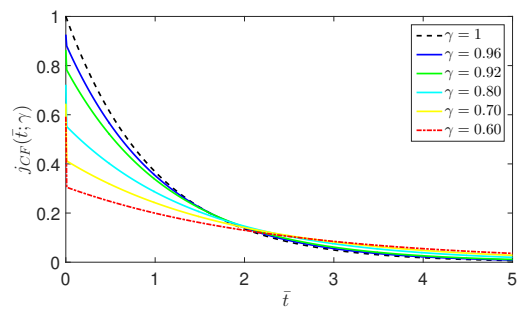


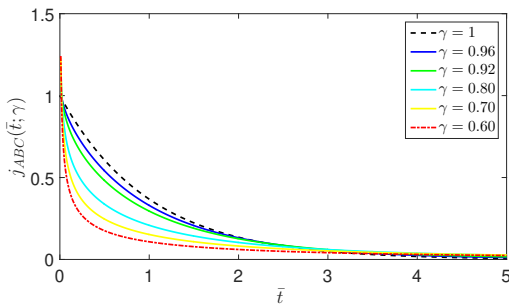
Figura 3.2: Gráficas de las soluciones  $j(\bar{t}; \gamma)$  usando diferentes operadores diferenciales fraccionarios,  $0 < \gamma \leq 1$  y un campo eléctrico constante  $E_0$ .



(a)  $j_C$



(b)  $j_{CF}$



(c)  $j_{ABC}$

Figura 3.3: Gráficas de las soluciones  $j(\bar{t}; \gamma)$  usando diferentes operadores diferenciales fraccionarios,  $0 < \gamma \leq 1$  y un campo eléctrico  $E_0\delta(\bar{t})$ .



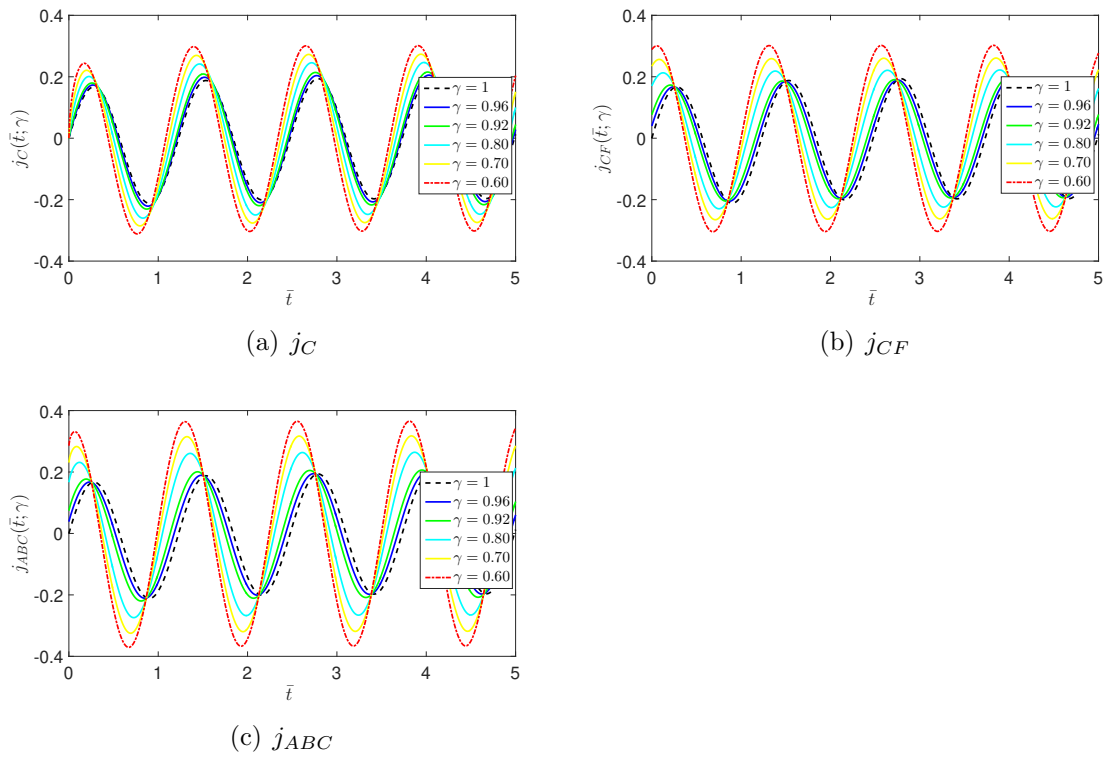


Figura 3.4: Gráficas de las soluciones  $j(\bar{t}; \gamma)$  usando diferentes operadores diferenciales fraccionarios,  $0 < \gamma \leq 1$  y un campo eléctrico oscilatorio  $E_0 \cos \omega \tau \bar{t}$ .

[98]. Por otro lado, usando la ABC, la solución dada está en términos de la función ML, la cual interpola para valores de tiempo, entre los de tipo exponencial y los de potencias negativas. Los de tipo exponencial con decaimiento rápido para tiempos pequeños  $t \rightarrow 0$ , mientras que los de potencias negativas decaen de manera lenta. Las diferencias se acentúan con respecto a la solución ordinaria conforme  $\gamma < 0.8$ . En las

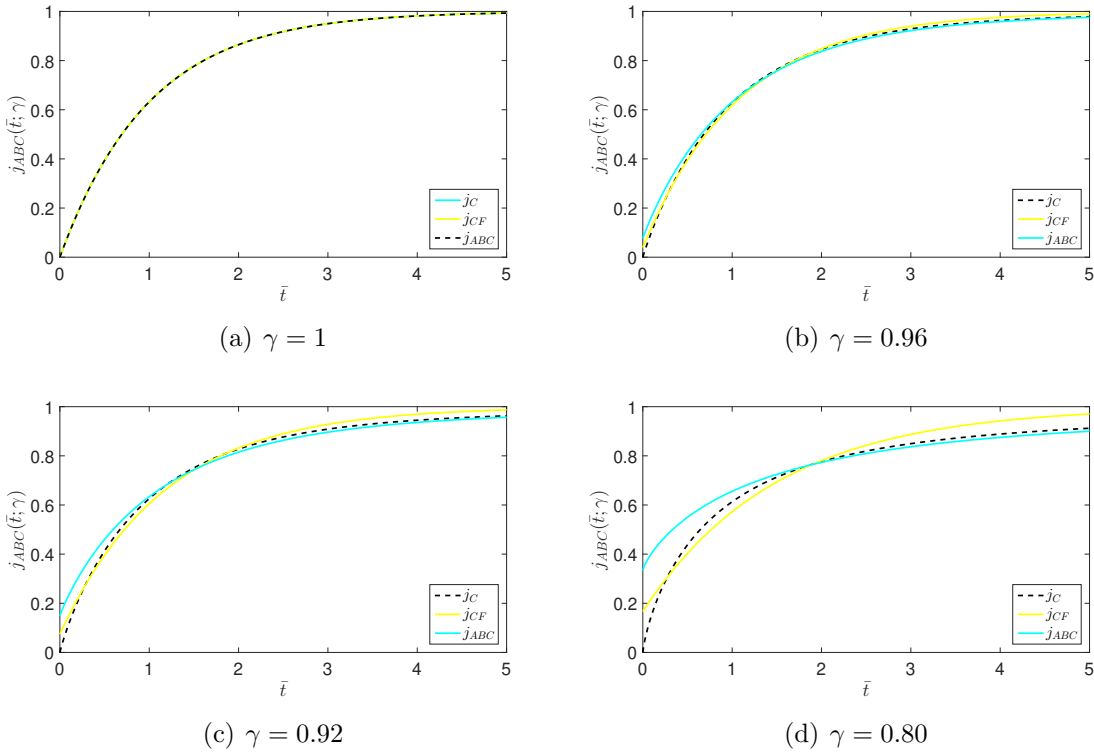


Figura 3.5: Variación de la densidad de corriente  $j(\bar{t}; \gamma)$  cuando se utiliza un campo eléctrico constante  $E_0$ , con las derivadas fraccionarias de Caputo, DCF y ABC, usando valores específicos de  $\gamma$ .

Figuras 3.5, 3.6, y 3.7 se puede ver que cuando  $\gamma = 1$ , los resultados obtenidos usando derivadas de Caputo, DCF y ABC son idénticas. Sin embargo, conforme  $\gamma < 0.8$ , las diferencias se incrementan, esto se debe al *kernel* en la estructura de las definiciones usadas de derivadas fraccionarias. Las diferencias entre los resultados obtenidos para la densidad de corriente usando Caputo y ABC para lapsos pequeños de tiempo  $\bar{t} \rightarrow 0$  y para valores grandes de tiempo  $\bar{t} \rightarrow \infty$  es el término  $\gamma/2 - \gamma$ .

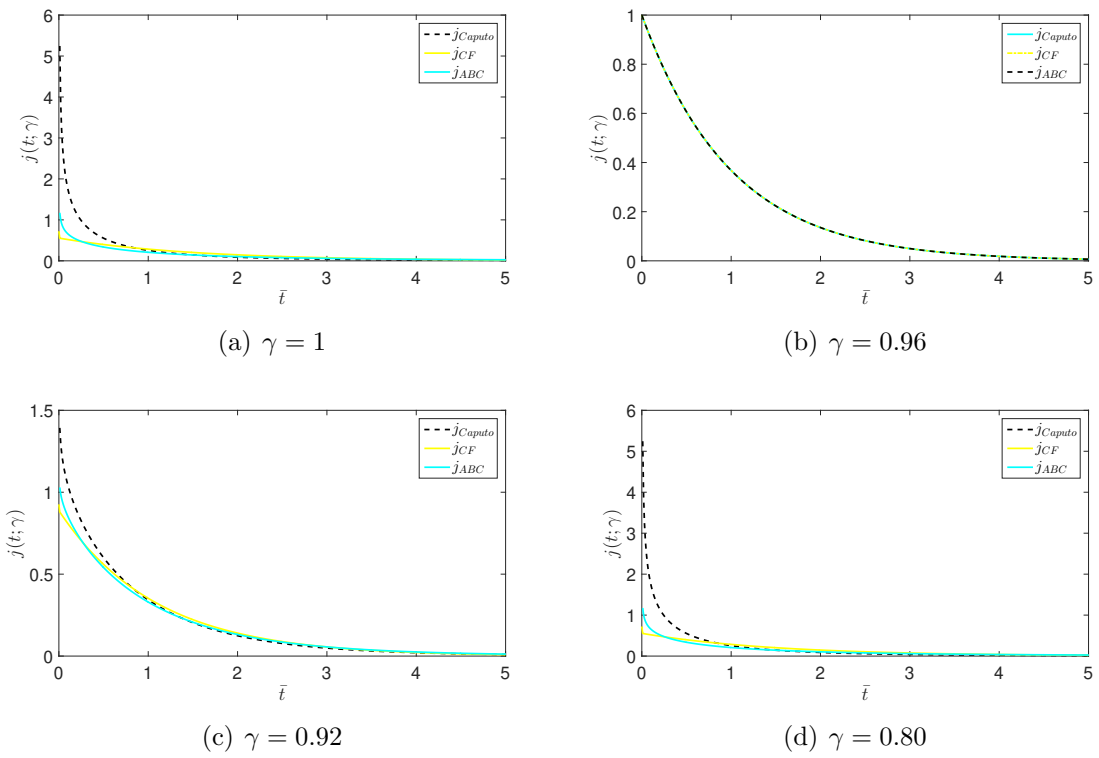
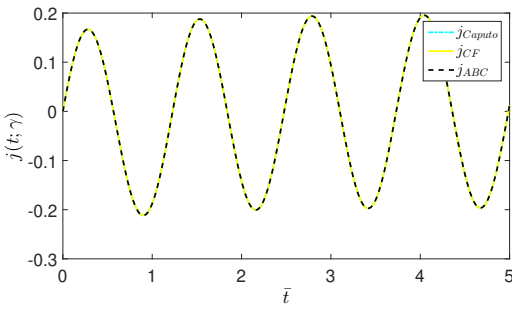
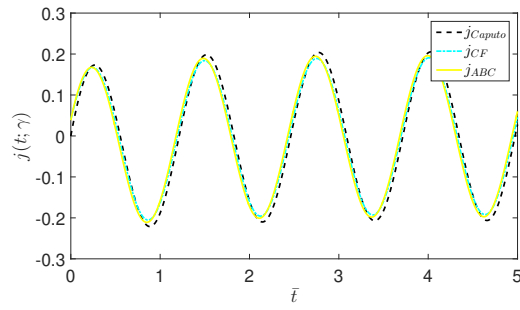


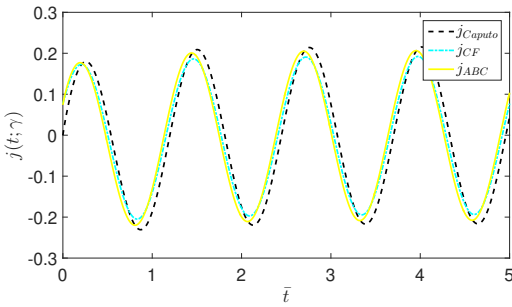
Figura 3.6: Variación de la densidad de corriente  $j(\bar{t}; \gamma)$  cuando se utiliza un campo eléctrico  $E_0\delta(\bar{t})$ , con las derivadas fraccionarias de Caputo, DCF y ABC, usando valores específicos de  $\gamma$ .



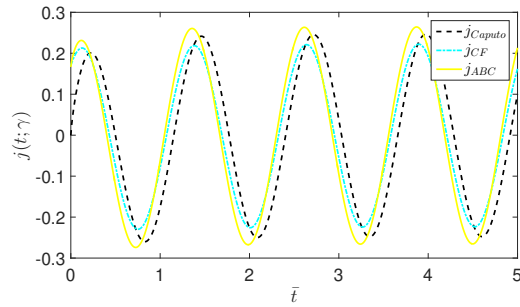
(a)  $\gamma = 1$



(b)  $\gamma = 0.96$



(c)  $\gamma = 0.92$



(d)  $\gamma = 0.80$

Figura 3.7: Variación de la densidad de corriente  $j(\bar{t}; \gamma)$  cuando se utiliza un campo eléctrico oscilatorio  $E_0 \cos \omega \tau \bar{t}$ , con las derivadas fraccionarias de Caputo, DCF y ABC, usando valores específicos de  $\gamma$ .

Las gráficas en la Figura 3.8 representan las diferencias entre las funciones obtenidas con las derivadas fraccionarias DCF y ABC. Se puede ver nuevamente que las diferencias se incrementan cuando  $\gamma < 0.8$ , también se puede ver que, para tiempos grandes no hay diferencias notables entre la derivada de Caputo y ABC, debido a que ambas dependen de la función ML.

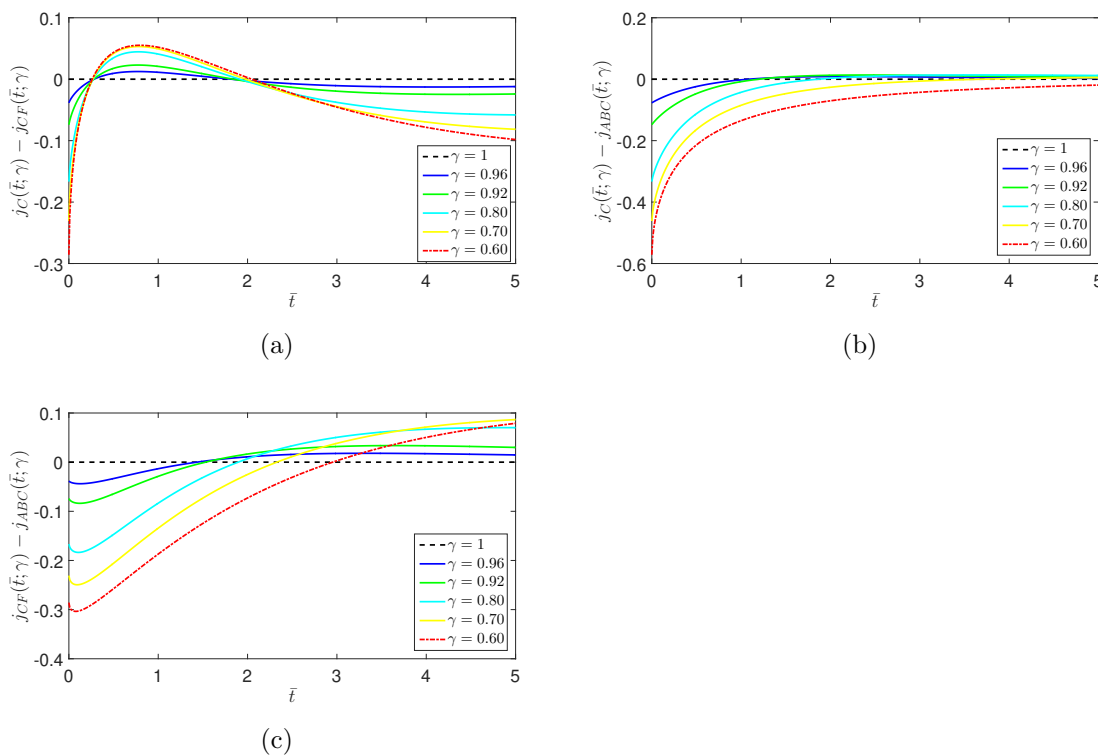


Figura 3.8: Las gráficas muestran las diferencias entre los operadores diferenciales Caputo, DCF y ABC, para un campo eléctrico constante y algunos valores de  $\gamma$ .

### 3.2.3. Conclusiones

En este trabajo se realizó un análisis en el dominio del tiempo del modelo fraccionario de Drude utilizando las derivadas DCF y la ABC. Para el estudio se consideraron

tres campos eléctricos: uno constante, uno descrito por un impulso y otro tipo oscilatorio. El análisis se hizo suponiendo valores de orden de derivada  $0 < \gamma \leq 1$ . Se mostró que la densidad de corriente  $j(t)$  depende del tiempo, del orden de la derivada fraccionaria y de la definición de derivada fraccionaria usada. Adicionalmente se realizaron algunas comparaciones con el trabajo realizado previamente usando la derivada de Caputo [92]. Se mostró que cuando se usan diferentes operadores fraccionarios cambian los comportamientos cuando  $\bar{t} \rightarrow 0$  y cuando  $\bar{t} \rightarrow \infty$ .

### 3.3. Circuitos eléctricos de orden fraccionario

En los últimos 3 años la derivada conformable (2.42) ha atraído la atención de múltiples investigadores [113, 114], debido a que su aplicación es muy sencilla a diferencia de otras definiciones de derivada fraccionaria. En la actualidad existen varias aplicaciones prácticas que hacen uso de ella [115]-[118]. Con la motivación de encontrar nuevos modelos para describir fenómenos conocidos y algunos desconocidos, en este proyecto se propone la aplicación de dicha derivada en los circuitos eléctricos RC, LC y RLC para analizar su comportamiento. Se demuestra que el estado del circuito depende no solo del tiempo, además varía con el orden de la derivada  $0 < \gamma \leq 1$ , esto nos puede ayudar a ajustar curvas. En el caso particular cuando  $\gamma = 1$ , la solución vuelve al caso ordinario.

Un circuito eléctrico RLC se compone de una resistencia R, un inductor L y un capacitor C; que a su vez puede ser alimentado por una fuente de voltaje  $e(t)$ . Se consideran casos especiales, cuando falta el inductor, circuito RC o cuando falta la resistencia, circuito LC. En la Figura (3.9) se muestra el diagrama de un circuito RLC.

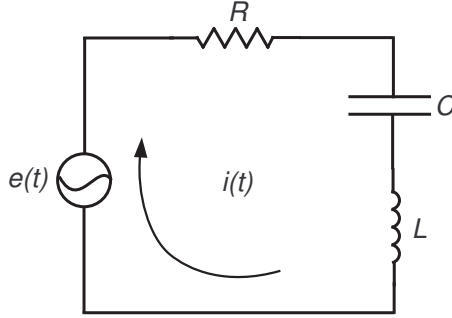


Figura 3.9: Diagrama de un circuito eléctrico RLC.

### 3.3.1. Circuito RC fraccionario

La ecuación que describe el comportamiento de un circuito RC es

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{\tau}V = \frac{e(t)}{\tau}, \quad (3.42)$$

donde  $V$  es el voltaje del capacitor,  $\tau = RC$  es la constante de tiempo medida en segundos y  $C$  es la capacitancia. Si consideramos constante el voltaje de la fuente  $e(t) = e_0$ , la solución es

$$V(t) = e_0 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right\}. \quad (3.43)$$

Partiendo de una ecuación diferencial ordinaria se puede llegar a una ecuación diferencial fraccionaria. Para realizar el proceso podemos tomar como base la ecuación diferencial del circuito RC. Tradicionalmente se sustituye el operador entero por un operador fraccionario. Esto es correcto desde el punto de vista puramente matemático, sin embargo, desde el punto de vista de física e ingeniería, esto no es del todo cierto, y se necesita hacer unas correcciones. En [99] se propone una forma sistemática de construir ecuaciones diferenciales fraccionarias dimensionalmente consistentes, tomando esto en cuenta en [100]-[107] es utilizado dicho sistema junto con la derivada fraccionaria de Caputo. Se introducen los parámetros  $\sigma_t$  y  $\sigma_x$  con la dimensionalidad apropiada como sigue

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{\sigma_t^{1-\gamma}} \frac{d^\gamma}{dt^\gamma}, \quad \frac{d}{dx} = \frac{1}{\sigma_x^{1-\gamma}} \frac{d^\gamma}{dx^\gamma}, \quad (3.44)$$

donde  $\gamma$  es un valor arbitrario que representa el orden de la derivada,  $0 < \gamma \leq 1$ . El parámetro  $\sigma_t$  representa las componentes de tiempo del sistema, su dimensión es dada en segundos [s], el parámetro  $\sigma_x$  tiene dimensiones de longitud [l] y representa las componentes espaciales fraccionarias [99]. Entonces se puede expresar

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{\tau^{1-\gamma}} \frac{d^\gamma}{dt^\gamma}. \quad (3.45)$$

Si reemplazamos los operadores enteros por operadores fraccionarios de orden  $\gamma$  en la ecuación (3.42), podemos expresar la ecuación de un circuito RC de orden fraccionario, como

$$\frac{d^\gamma V}{dt^\gamma} + \frac{1}{\tau^\gamma} V = \frac{e(t)}{\tau^\gamma}, \quad 0 < \gamma \leq 1. \quad (3.46)$$

La ecuación fraccionaria del circuito RC ha sido estudiada previamente por otros autores utilizando los operadores diferenciales fraccionarios: Caputo [107]-[103], la DCF [104, 105], y ABC [106].

### 3.3.2. Circuito RC con la derivada conformable

Si consideramos la relación (3.45) y usamos la definición de derivada conformable, en particular la propiedad 6 del teorema,

$$\frac{d^\gamma}{dt^\gamma} f(t) = t^{1-\gamma} \frac{d}{dt} f(t), \quad (3.47)$$

así obtenemos

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{1}{\tau^{1-\gamma}} \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} f(t) = \frac{t^{1-\gamma}}{\tau^{1-\gamma}} \frac{d}{dt} f(t). \quad (3.48)$$

Podemos decir que la expresión (3.48) es una *transformada conformable fraccionaria*.

Si reemplazamos (3.48) en (3.42) tenemos

$$\frac{dV}{dt} + at^{\gamma-1}V = at^{\gamma-1}e(t), \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad (3.49)$$

donde,  $a = 1/\tau^\gamma$ . La ecuación (3.49) es una ecuación diferencial “fraccionaria” conformable del circuito RC [108], que en realidad es una ecuación diferencial ordinaria



### 3.3. CIRCUITOS ELÉCTRICOS DE ORDEN FRACCIONARIO

---

lineal fraccionaria con coeficientes variables y de potencia no entera. Los coeficientes variables son de orden fraccionario  $0 < \gamma \leq 1$ .

Si consideramos una fuente constante  $e(t) = e_0$ , de la ecuación (3.49) tenemos

$$\frac{dV}{dt} + at^{\gamma-1}V = bt^{\gamma-1}, \quad (3.50)$$

donde  $a = 1/\tau^\gamma$  y  $b = e_0/\tau^\gamma$ . Considerando la condición inicial  $V(0) = 0$ , la solución está dada por

$$V_{conf}(t; \gamma) = e_0 \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{1}{\gamma} \left( \frac{t}{\tau} \right)^\gamma \right] \right\}, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad (3.51)$$

podemos ver que para el caso ordinario cuando  $\gamma = 1$ , la ecuación (3.51) se reduce a (3.43). La Figura 3.10 muestra la solución para el circuito RC con derivada conformable y algunos valores de  $\gamma$ .

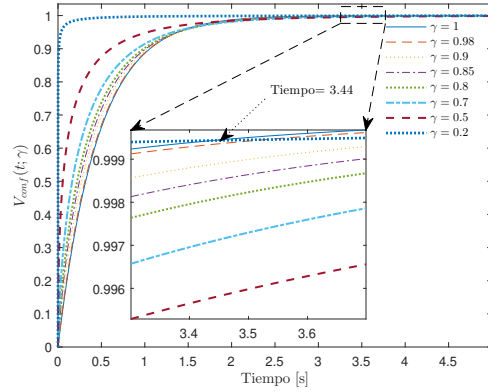


Figura 3.10: Simulación numérica de la ecuación (3.51) para algunos valores de  $\gamma$  en el circuito RC con fuente constante.

Como se mencionó anteriormente, ya se habían hecho algunos trabajos para resolver el circuito RC con otras derivadas fraccionarias [107, 102]. En 3.52 se muestra la solución del circuito RC utilizando la derivada de Caputo

$$V_{caputo}(t; \gamma) = e_0 [1 - E_\gamma(-\bar{t}^\gamma)], \quad (3.52)$$

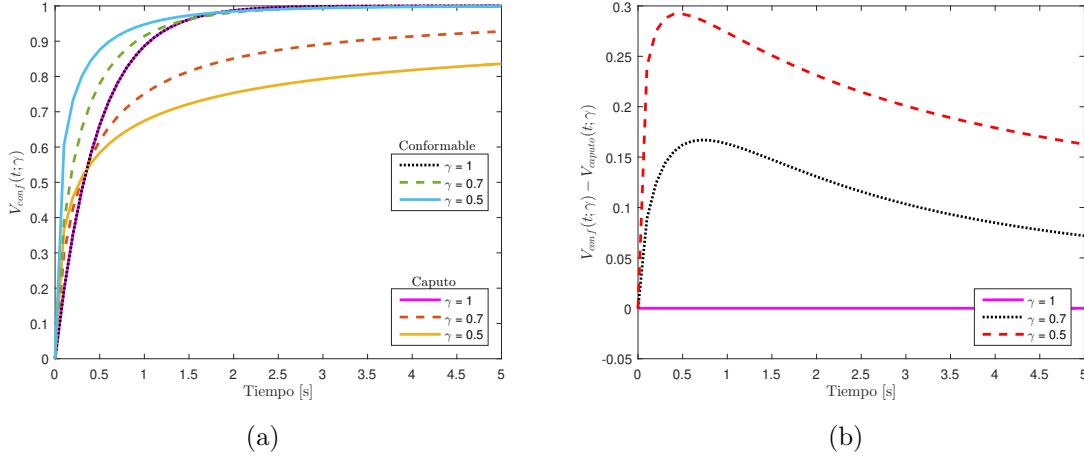


Figura 3.11: (a) Gráficas de las ecuaciones (3.43), (3.51) y (3.52) para algunos valores de  $\gamma$ : 1, 0.7 y 0.5. en (b) se muestra la gráfica de la diferencia entre la solución con derivada conformable y Caputo del circuito RC para los mismos valores de  $\gamma$ .

donde  $\bar{t} = t/\tau$  y  $E_\gamma(\cdot)$  es la función ML y  $0 < \gamma \leq 1$ .

En la Figura 3.11 (a) se muestran juntas las gráficas de las soluciones del circuito RC conformable, usando la solución ordinaria, la solución con derivada conformable y la solución con Caputo. En la Figura 3.11 (b) se puede observar la diferencia entre ambas soluciones fraccionarias. De ambas gráficas se puede ver que aproximadamente en  $t = 0.55$  s se genera la mayor diferencia, después disminuye lentamente. Se puede ver que esa diferencia es mayor conforme  $\gamma < 1$ .

En el caso de una fuente oscilatoria  $e(t) = e_0 \cos \omega t$ , donde  $\omega$  es la frecuencia angular, de (3.49) tenemos la ecuación diferencial fraccionaria conformable de orden

$$\gamma \frac{dV}{dt} + at^{\gamma-1}V = bt^{\gamma-1} \cos \omega t, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad (3.53)$$

Donde  $a = 1/\tau^\gamma$  y  $b = e_0/\tau^\gamma$ . Esta es una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficiente variable de orden  $\gamma$ . La simulación numérica de la Figura 3.12 se muestra en la gráfica para diferentes valores de  $\gamma$ .

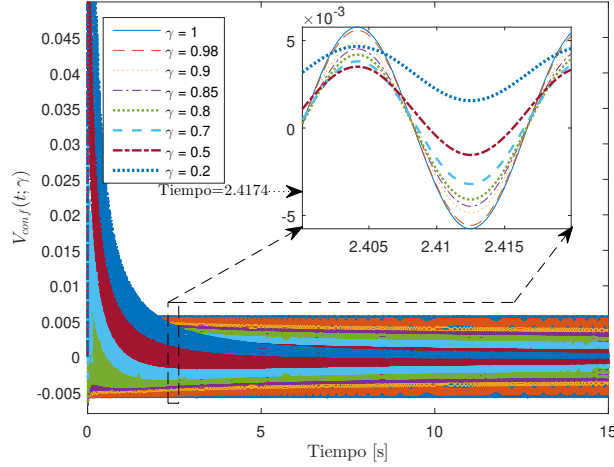


Figura 3.12: Gáfica de la solución del circuito RC con una fuente externa oscilatoria, con  $0 < \gamma \leq 1$ .

En las Figuras 3.10-3.12 se puede ver que para un tiempo menor a un  $\tau_c$ , las curvas correspondientes a valores de  $\gamma$  están por encima de la curva ordinaria con  $\gamma = 1$ , y para tiempos mayores a  $\tau_c$  las curvas están por debajo de la solución ordinaria. En este caso  $\tau_c = 1.4040$  s para un circuito con fuente constante y  $\tau_c = 1.6315$  s para una fuente oscilatoria.

### 3.3.3. Circuito LC con derivada conformable

Considere un circuito eléctrico LC. Si el capacitor se encuentra inicialmente cargado y el interruptor es cerrado entonces, la corriente del circuito y la carga del capacitor oscilan entre valores positivos y negativos. La variación de la carga del capacitor con respecto al tiempo se describe por medio de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q(t) = 0, \quad (3.54)$$

y su solución ordinaria, en terminos de la carga  $q$  es

$$q(t) = q_0 \cos \omega_0 t, \quad (3.55)$$

donde  $\omega_0^2 = 1/LC$  es la frecuencia del circuito y  $q_0$  es la carga inicial del capacitor en  $t = 0$ . Usando la expresión (3.48), se puede

$$\frac{d^2}{dt^2} = \omega_0^{2(1-\gamma)} \frac{d^{2\gamma}}{dt^{2\gamma}} = \omega_0^{2(1-\gamma)} t^{2(1-\gamma)} \frac{d^2}{dt^2}. \quad (3.56)$$

Tomando en cuenta esta relación, se obtiene para (3.54) su correspondiente ecuación diferencial conformable.

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^{2\gamma} t^{2(\gamma-1)} q(t) = 0. \quad (3.57)$$

Las soluciones numéricas son graficadas en la Figura 3.13.

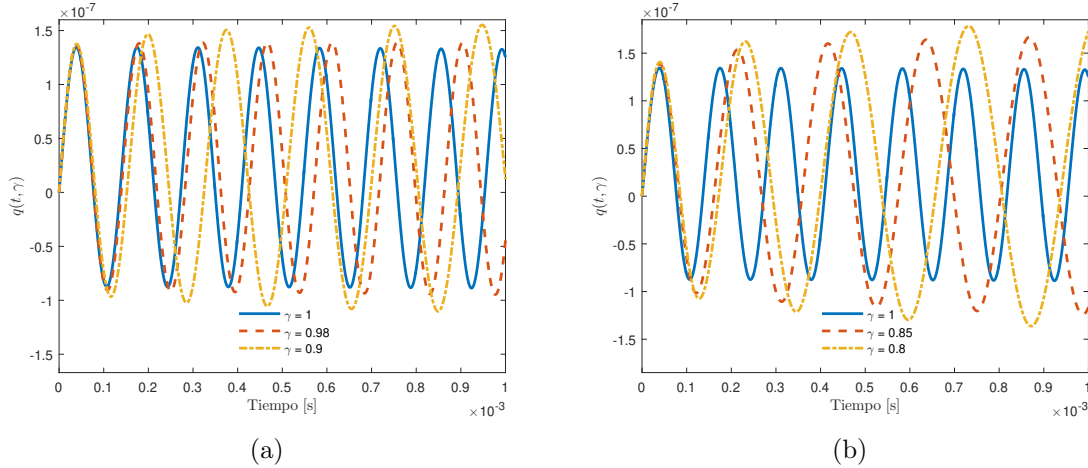


Figura 3.13: Gráficas correspondientes a la ecuación 3.57 para diferentes valores de  $\gamma$ . En (a) y en (b) se observa que cuando  $\gamma < 1$ , las amplitudes crecen, además tienen un cambio de fase con respecto a la solución ordinaria.

En el caso de una fuente harmónica con frecuencia angular  $\omega$ , tenemos su correspondiente ecuación diferencial conformable

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^{2\gamma} t^{2(\gamma-1)} q(t) = \omega_0^{2(\gamma-1)} t^{2(\gamma-1)} e_0 \cos \omega t. \quad (3.58)$$

### 3.3. CIRCUITOS ELÉCTRICOS DE ORDEN FRACCIONARIO

La simulación numérica es graficada en la Figura 3.14 para diferentes valores de  $\gamma$ . Los valores tomados para voltaje, inductancia, capacitancia y frecuencia son:  $e_0 = 50 V$ ,  $L = 10 \mu H$ ,  $C = 47 \mu F$  y  $f = 60 Hz$ , respectivamente. En las Figuras 3.13 y 3.14 se

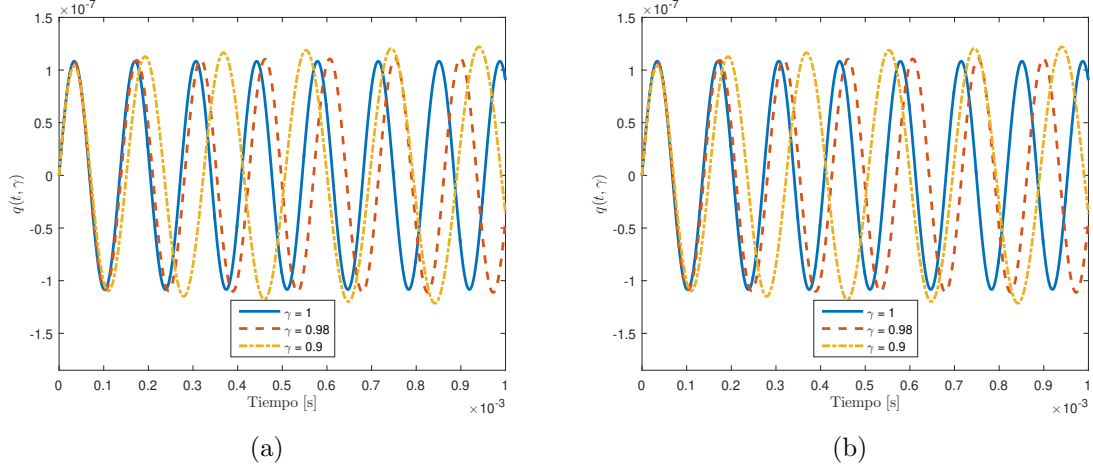


Figura 3.14: Gráficas correspondientes a la ecuación (3.58) para el circuito LC con fuente externa oscilante, para algunos valores de  $\gamma$ . En (a) y (b) se puede observar el que el comportamiento es similar al caso sin fuente externa pero la amplitud es mayor.

observa que cuando  $\gamma < 1$  las amplitudes crecen y las ondas tienen un desplazamiento con respecto a la onda ordinaria  $\gamma = 1$ . Estos desplazamientos pueden describir el comportamiento del circuito resonante LC con algunas perturbaciones, que no son consideradas en las ecuaciones (3.57) y (3.58), cuando  $\gamma = 1$ .

#### 3.3.4. Circuito RLC con derivada conformable

Si consideramos un circuito RLC sin fuente de voltaje externa, tenemos una ecuación diferencial conformable de segundo orden

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\zeta\omega_0^\gamma t^{\gamma-1} \frac{dq}{dt} + \omega_0^{2\gamma} t^{2(\gamma-1)} q = 0, \quad (3.59)$$

donde  $\zeta$  es el factor de amortiguamiento y se define por  $\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ . El valor de este factor de amortiguamiento determina el tipo de transitorio que exhibe el circuito. Para  $\zeta = 0$  tenemos un circuito sin amortiguamiento (3.57); si  $\zeta < 1$  tenemos un sistema subamortiguado, Figura 3.15 (a); si  $\zeta = 1$  es sistema es críticamente amortiguado Figura (b); finalmente, cuando  $\zeta > 1$  tenemos un sistema sobreamortiguado Figura (c). La solución se obtiene de manera numérica utilizando la función de Matlab `ode`

En las gráficas de la Figura 3.15 se puede observar que, para cada valor de  $\zeta$  se tiene un conjunto de estados debidos al valor de  $0 < \gamma \leq 1$ , esto no sucede en el caso ordinario, sin embargo, en el caso de los sistemas fraccionarios este comportamiento es normal. Finalmente, para el circuito RLC con una fuente externa, se tiene la ecuación

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 t^{\gamma-1} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 t^{2(\gamma-1)} q = e_0 \omega_0^{2(\gamma-1)} t^{2(\gamma-1)} \cos \omega t. \quad (3.60)$$

usando nuevamente la función `ode` de Matlab se obtiene la solución de manera numérica del circuito RLC con una fuente externa. La gráfica correspondiente a la ecuación (3.60), para diferentes valores de  $\gamma$  se muestra en la Figura 3.16. Los valores tomados para voltaje, resistencia, inductancia capacitancia y frecuencia son:  $e_0 = 1V$ ,  $R = 1k\Omega$ ,  $L = 10\mu$ ,  $C = 47\mu F$  y  $f = 60Hz$ , respectivamente y las condiciones iniciales son:  $q(0) = 0 \text{ Coulombs}$  y  $q'(0) = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Coulombs}$ .

La aplicación de la derivada conformable a los modelos de circuitos eléctricos en este trabajo predice comportamientos que pudieran ser atribuidos a heterogeneidades [99]-[106], los cuales pueden ser causados por rasgos no conservativos en los componentes que involucran efectos irreversibles disipativos, tales como fricción ohmica, memoria térmica y no linealidades, como consecuencia de los campos eléctrico y magnético. Estos efectos disipativos no son considerados en los modelos estándar, pero es importante tomarlos en cuenta [106]. El parámetro  $\gamma$  nos da información de la propiedades intrínsecas del sistema. Se puede observar que para  $\gamma < 1$ , el sistema se estabiliza en un tiempo ligeramente largo. La solución numérica de las ecuaciones diferenciales conformables (3.49, 3.57, 3.58, 3.59 y 3.60) son resueltas por medio

### 3.3. CIRCUITOS ELÉCTRICOS DE ORDEN FRACCIONARIO

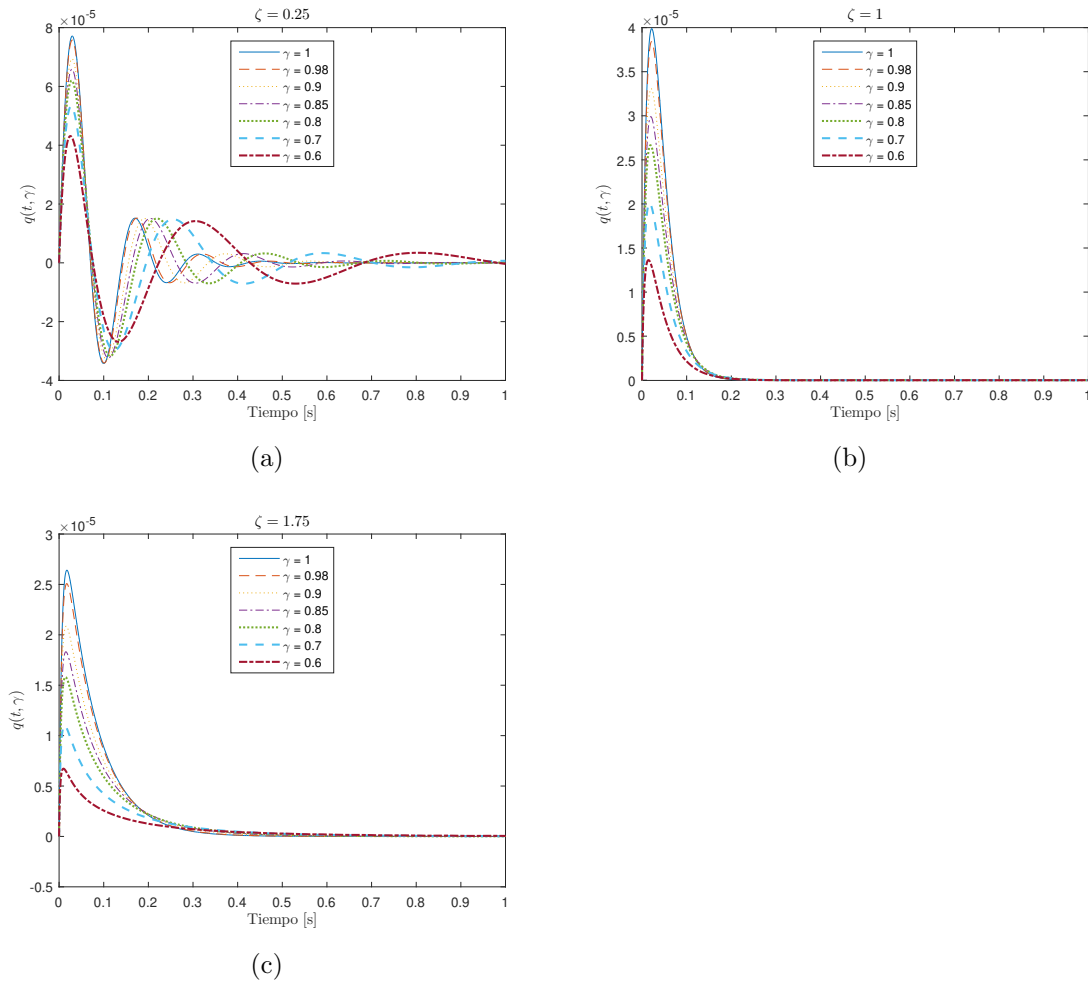


Figura 3.15: Gráficas correspondientes a la solución de la ecuación diferencial conformable del circuito RLC sin fuente externa (3.59), para algunos valores de  $\gamma$ . En (a) se muestra que si  $0 < \zeta < 1$  el sistema muestra un comportamiento oscilatorio subamortiguado. En (b) si  $\zeta = 1$  el sistema es críticamente amortiguado. En (c) cuando  $\zeta > 1$ , es un sistema sobreamortiguado y la función decrece de manera exponencial.

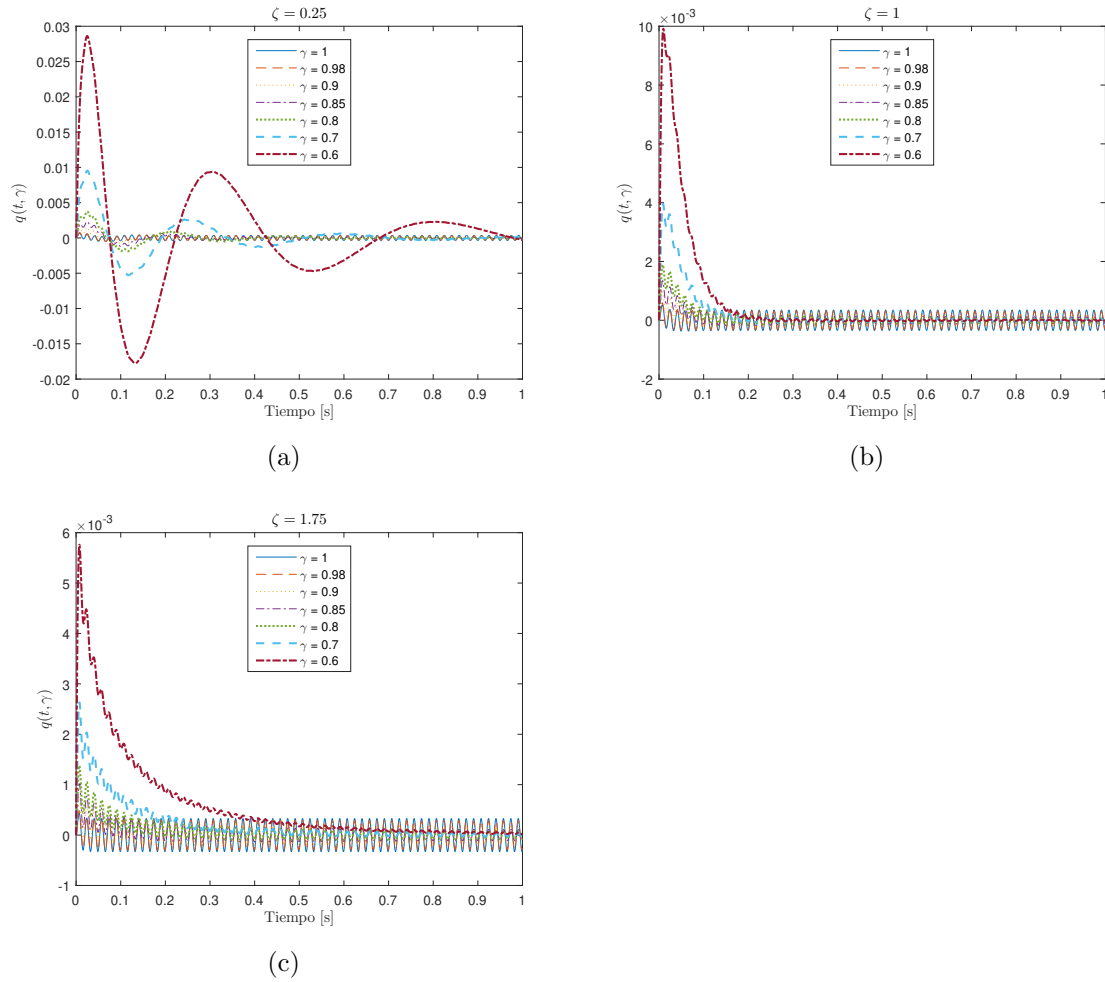


Figura 3.16: Gráficas correspondientes a la solución del circuito RLC con fuente externas oscilante 3.60), para algunos valores de  $\gamma$ . (a) un sistema subamortiguado  $\zeta < 1$ . (b) para  $\zeta = 1$  un sistema críticamente amortiguado. (c) circuito sobre amortiguado.



de Matlab, utilizando la función `ode` [106]. Esta función tiene una implementación numérica del método de Runge-Kutta con tiempo variable [119].

### 3.3.5. Conclusiones

En este trabajo se resolvieron las ecuaciones diferenciales de los circuitos RC, LC y RLC, utilizando el método propuesto en [99] para obtener la correspondiente ecuación diferencial fraccionaria. Después se aplicó la transformación de la ecuación fraccionaria, una nueva clase de ecuación diferencial ordinaria con coeficientes de potencias no enteras del circuito eléctrico correspondiente. Las soluciones obtenidas de los modelos de los circuitos son graficadas. En el caso de la solución del circuito RC con la derivada conformable se hizo una comparación con la solución con la derivada de Caputo. Se mostró que al igual que las soluciones encontradas con la derivada de Caputo y con otros operadores, la solución fraccionaria encontrada depende del tiempo  $t$  y el orden de derivada  $0 < \gamma \leq 1$  y que en el caso particular cuando  $\gamma = 1$  se regresa a la solución ordinaria de los circuitos eléctricos.

## 3.4. Realzado de vasos sanguíneos

Los angiogramas son radiografías tomadas de los vasos sanguíneos, por medio de un catéter y un líquido de contraste que es introducido al torrente sanguíneo. Algunos ejemplos de angiogramas son: angiogramas de abdominal, angiogramas de aórtica, angiogramas de coronaria, angiogramas cerebrales, etc. Por otro lado, la evolución de la tecnología ha catapultado el desarrollo de sistemas de diagnóstico por medio de segmentación automática de tejidos, *Computer Assisted Diagnosis* (CAD). Por ejemplo, la segmentación automática de coronarias juega un rol muy importante en

el diagnóstico y tratamiento de enfermedades cardiovasculares [121]. Sin embargo, las imágenes obtenidas de los angiogramas presentan problemas en su calidad, como son: no uniformidad de iluminación o bajo contraste. Por esta razón, para un proceso de diagnóstico automático, se necesita una etapa de realzado de vasos sanguíneos. Se han propuesto varios métodos para resolver este problema, algunos utilizan operaciones morfológicas para encontrar formas de arterias [122]-[125]; otros métodos utilizan rasgos de la matriz Hessiana [126]-[132]. En [121] se propone un método de segmentación automática de arterias de coronaria. Este método consiste en dos etapas: en la primera son detectadas las estructuras de vasos sanguíneos utilizando los eigenvalores de la matriz Hessiana. Después en la segunda etapa, la magnitud de la respuesta de la medida de *vesselness*<sup>1</sup> es segmentada por un algoritmo de umbralización evolucionario, utilizando un método de optimización de sumas de pesos multiobjetivo.

Por otro lado, en años recientes el CF ha sido utilizado en procesamiento de imágenes y en tareas de visión como son: detección de bordes [133]-[135] y realzado de texturas [136, 137]. Estos algoritmos usan las propiedades de las derivadas fraccionarias para mejorar el desempeño de los operadores gradiente y laplaciano, descartando falsos bordes o mejorando la detección de bordes finos [133]. Motivado por el éxito obtenido por otros autores en la aplicación del CF en procesamiento de imágenes, en este trabajo se propone una variación del algoritmo de Frangi para realzado de vasos sanguíneos. Esta variación consiste en la utilización de una matriz Hessiana de orden fraccionario y sus propiedades para el mejoramiento de la detección de vasos sanguíneos en angiogramas de coronarias.

La variación de la matriz Hessiana se hace utilizando la derivada GL (2.26), debido a su fácil implementación en un algoritmo computacional. El orden fraccionario de la derivada es probado en el intervalo  $[2, 3)$  y los angiogramas usados en este trabajo son parte de una base de 100 angiogramas de coronarias. Cada imagen tiene un tamaño de

---

<sup>1</sup>Condición de ser clasificado como vaso sanguíneo.

300 × 300, para cada angiograma fue trazado su correspondiente imagen *ground-truth*<sup>2</sup>, que fue delineado por un especialista y la aprobación ética fue otorgada por el IMSS UMAE T1 León. La evaluación del desempeño del algoritmo se realiza calculando el área bajo la curva *Receiver Operating Characteristic* (ROC). Los resultados son comparados con los obtenidos con el método tradicional de Frangi.

### 3.4.1. Algoritmo de Frangi

Las arterias de coronarias en los angiogramas pueden ser descritas como estructuras tubulares con iluminación no uniforme, diferentes diámetros y diversas orientaciones [6]. EL algoritmo de Frangi emplea las propiedades de los eigenvalores de la matriz Hessiana, la cual es calculada para píxel de la imagen del angiograma. La matriz Hessiana se define como

$$H = \begin{bmatrix} I_{xx}(x, y) & I_{xy}(x, y) \\ I_{yx}(x, y) & I_{yy}(x, y) \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

donde los elementos de la matriz son las segundas derivadas locales de la imagen y son calculadas por

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = I(x, y) * \sigma^2 G_{xx}, \\ I_{xy} &= \frac{\partial^2 I}{\partial y \partial x} = I(x, y) * \sigma^2 G_{xy}, \\ I_{yx} &= \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} = I(x, y) * \sigma^2 G_{yx}, \\ I_{yy} &= \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = I(x, y) * \sigma^2 G_{yy}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Las segundas derivadas son obtenidas con la operación de convolución, representada por el símbolo  $*$ , entre la imagen  $I(x, y)$  y la correspondiente derivada parcial de la

---

<sup>2</sup>Imagen delineada por un experto, utilizada como referencia.

función Gaussiana  $G(x, y)$

$$G(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left[\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right]} \quad (3.63)$$

Como la matriz Hessiana es simétrica, el eigenvalor grande  $\lambda_1$  y el pequeño  $\lambda_2$  son calculados con

$$\alpha = \sqrt{(I_{xx} - I_{yy})^2 + 4I_{xy}^2} \quad (3.64)$$

$$\lambda_1 = \frac{I_{xx} + I_{yy} + \alpha}{2} \quad (3.65)$$

$$\lambda_2 = \frac{I_{xx} + I_{yy} - \alpha}{2} \quad (3.66)$$

Entonces la medida de *vesselness* está dada por

$$V_F = \begin{cases} \exp\left(-\frac{R_\beta^2}{2\beta^2}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{s^2}{2\gamma^2}\right)\right] & \text{si } (\lambda_1, \lambda_2 < 0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (3.67)$$

en este caso  $R_\beta = \lambda_1/\lambda_2$ ,  $s = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$ ,  $\beta = 0.5$  y  $\gamma$  se define como la mitad del máximo valor de  $s$ . La imagen final resultante se obtiene seleccionando el valor de *vesselness* más alto para cada píxel, elegido entre los valores obtenidos utilizando diferentes escalas de  $\sigma$  para cada píxel. Se comienza con un  $\sigma_0$ , y se termina en un  $\sigma_f$ , utilizando incrementos de  $\sigma_p$ .

### 3.4.2. Hessiana de orden fraccionario

El método propuesto consiste en modificar la matriz Hessiana. En este caso los elementos de la Hessiana son sustituidos por derivadas parciales de orden,  $(n + \varphi)$  de la imagen  $I(x, y)$ , donde  $0 \leq \varphi < 1$ , entonces con  $n = 2$  la Hessiana de orden  $(2 + \varphi)$  es expresada como

$$H^{2+\varphi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^{2+\varphi} I}{\partial x^{2+\varphi}} & \frac{\partial^{2+\varphi} I}{\partial x^{1+\varphi} \partial y} \\ \frac{\partial^{2+\varphi} I}{\partial y \partial x^{1+\varphi}} & \frac{\partial^{2+\varphi} I}{\partial y^{2+\varphi}} \end{bmatrix}, \quad (3.68)$$

en este caso, los elementos de la matriz Hessiana fraccionaria son obtenidos con la convolución de la imagen  $I(x, y)$  con la  $(2 + \varphi)$ -derivada de la función Gaussiana  $G(x, y)$  de manera similar al caso ordinario.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^{2+\varphi} I}{\partial x^{2+\varphi}} &= I(x, y) * \sigma^2 D_x^\varphi G_{xx}, \\
 \frac{\partial^{2+\varphi} I}{\partial x^{1+\varphi} \partial y} &= I(x, y) * \sigma^2 D_x^\varphi G_{xy}, \\
 \frac{\partial^{2+\varphi} I}{\partial y \partial x^{1+\varphi}} &= I(x, y) * \sigma^2 D_x^\varphi G_{yx}, \\
 \frac{\partial^{2+\varphi} I}{\partial y^{2+\varphi}} &= I(x, y) * \sigma^2 D_y^\varphi G_{yy}.
 \end{aligned}
 \tag{3.69}$$

Una vez que se encuentra el valor de la nueva Hessiana, se calculan los eigenvalores y se encuentra la imagen encontrando los mejores valores de *vesselness*, recorriendo las diferentes escalas de  $\sigma$  para cada píxel, como en el método convencional. Si  $\varphi = 0$  la Hessiana fraccionaria se convierte en la Hessiana tradicional y el algoritmo vuelve a ser el de Frangi.

### 3.4.3. Resultados

Para la realización de los experimentos fue implementado el algoritmo en una computadora personal con procesador AMD A-9 A 3.00 Hz y 12 GB RAM, con plataforma Matlab. La comparación se hizo manteniendo constantes los parámetros: tamaño del paso  $\sigma_p$ , valor inicial  $\sigma_0$  y valor final  $\sigma_f$ . Adicionalmente, se aplicó la derivada GL a la función Gaussiana con valores de derivada  $2 + \varphi$ , donde  $0 \leq \varphi < 1$ . La evaluación se hizo calculando el área bajo la curva ROC. Se hizo variar el valor de  $\varphi$ , mientras se mantuvieron constantes los parámetros  $\sigma_p = 0.5$ ,  $\sigma_0 = 1.0$ ,  $\sigma_f = 14$ . La Tabla 3.4.3 muestra los valores del área bajo la curva ROC obtenidos, cuando se aplica el algoritmo fraccionario en algunos angiogramas. En la primera columna se

$\varphi$	Ang. 1	Ang. 2	Ang. 3	Ang. 4	Promedio	Porcentaje %
0.00	0.9593	0.9536	0.9477	0.9686	0.9573	0.000
0.01	0.9609	0.9558	0.9485	0.9693	0.9586	0.138
0.02	0.9629	0.9584	0.9483	0.9700	0.9599	0.272
0.08	0.9707	0.9665	0.9481	0.9723	0.9644	0.742
0.09	0.9717	0.9667	0.9483	<b>0.9724</b>	0.9648	0.781
0.10	0.9726	0.9666	<b>0.9484</b>	<b>0.9724</b>	0.9650	0.804
0.11	0.9731	0.9670	0.9482	0.9723	0.9651	0.820
0.12	0.9734	<b>0.9673</b>	0.9481	0.9721	<b>0.9652</b>	<b>0.828</b>
0.13	<b>0.9736</b>	<b>0.9673</b>	0.9478	0.9718	0.9651	0.817
0.14	<b>0.9736</b>	0.9671	0.9475	0.9715	0.9649	0.797
0.15	0.9734	0.9670	0.9471	0.9711	0.9646	0.768

Tabla 3.1: Resultados del área bajo la curva ROC, usando ordenes de derivación fraccionaria  $\varphi$ , aplicada a algunos angiogramas.

muestra el valor fraccionario que se adiciona al orden de derivación,  $0 \leq \varphi < 0$ . Las siguientes cuatro columnas tienen los valores obtenidos de área para cada angiograma a cada valor de  $\varphi$ , la quinta columna es el valor promedio de área de los 4 angiogramas para cada valor de  $\varphi$ , la sexta columna representa el porcentaje de mejoría para cada valor de  $\varphi$  con respecto al algoritmo convencional (cuando  $\varphi = 0$ ). Por otra parte, las Figuras 3.17 (a) y (b) muestran un angiograma original y su correspondiente imagen *ground-truth* delineada por un experto 3.17 (b) y (d).

Las Figuras 3.18 (a) y (c) muestran como resultado las imágenes de vasos sanguíneos detectados despues de aplicar el algoritmo de Frangi y su correspondientes curvas ROC (b) y (d). Mientras que las Figuras (c) y (d) muestran el resultado de aplicar el algoritmo para valores  $\varphi > 0$  y su correspondiente curva ROC, en especial  $\varphi = 0.05$ . La Figura 3.19 muestra las gráficas de las curvas ROC usando valores de  $\varphi = 0, 0.05, 0.130, \text{ y } 0.15$ . y los valores de área calculados para cada caso. Con los datos en la Tabla 3.4.3 y los valores de área de la curva ROC, se puede observar que el valor del área incrementa cuando  $0 < \varphi < 0.15$ , sin embargo, decrece cuando

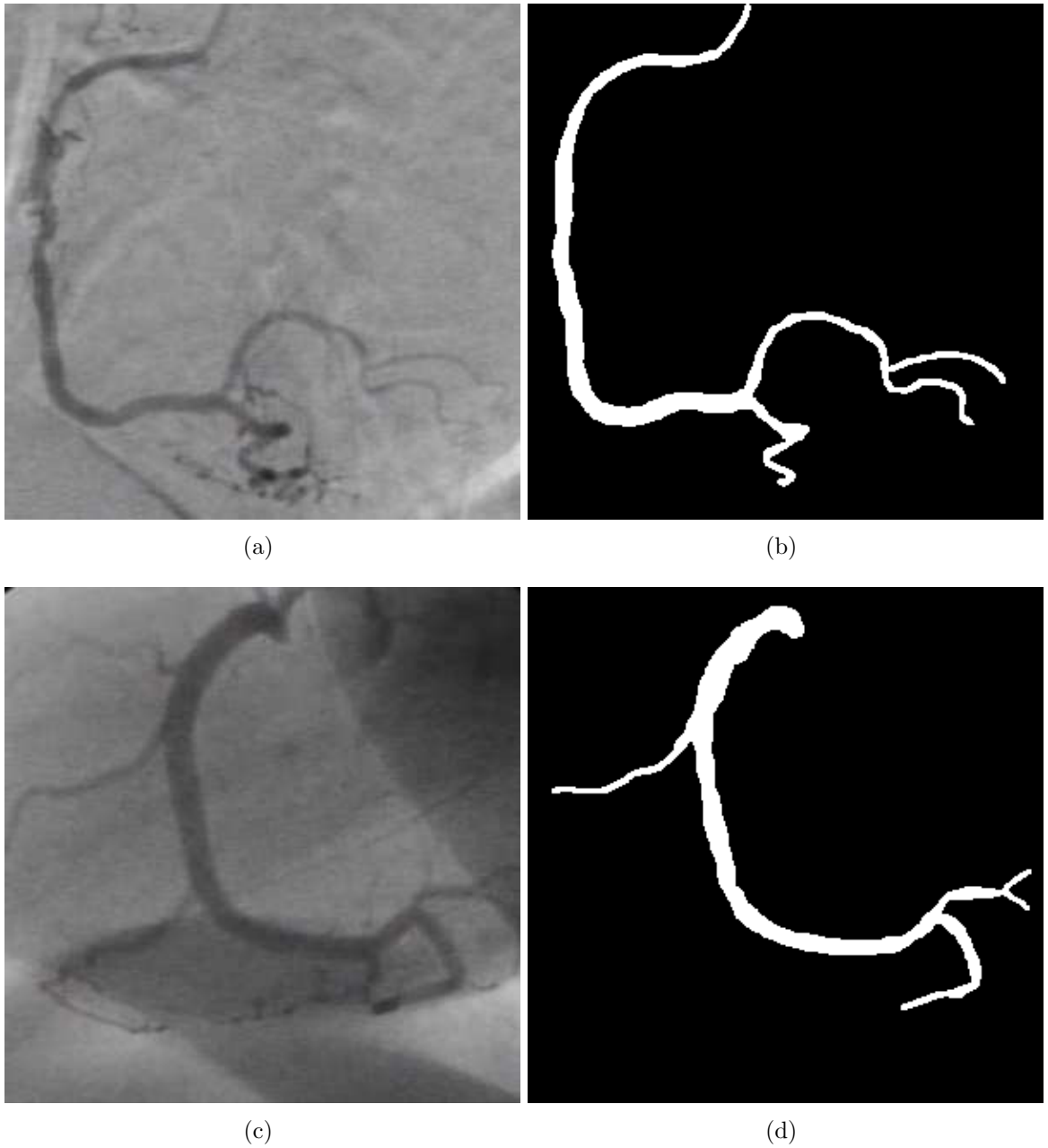


Figura 3.17: Angiogramas originales y su correspondiente imagen *ground-truth*.

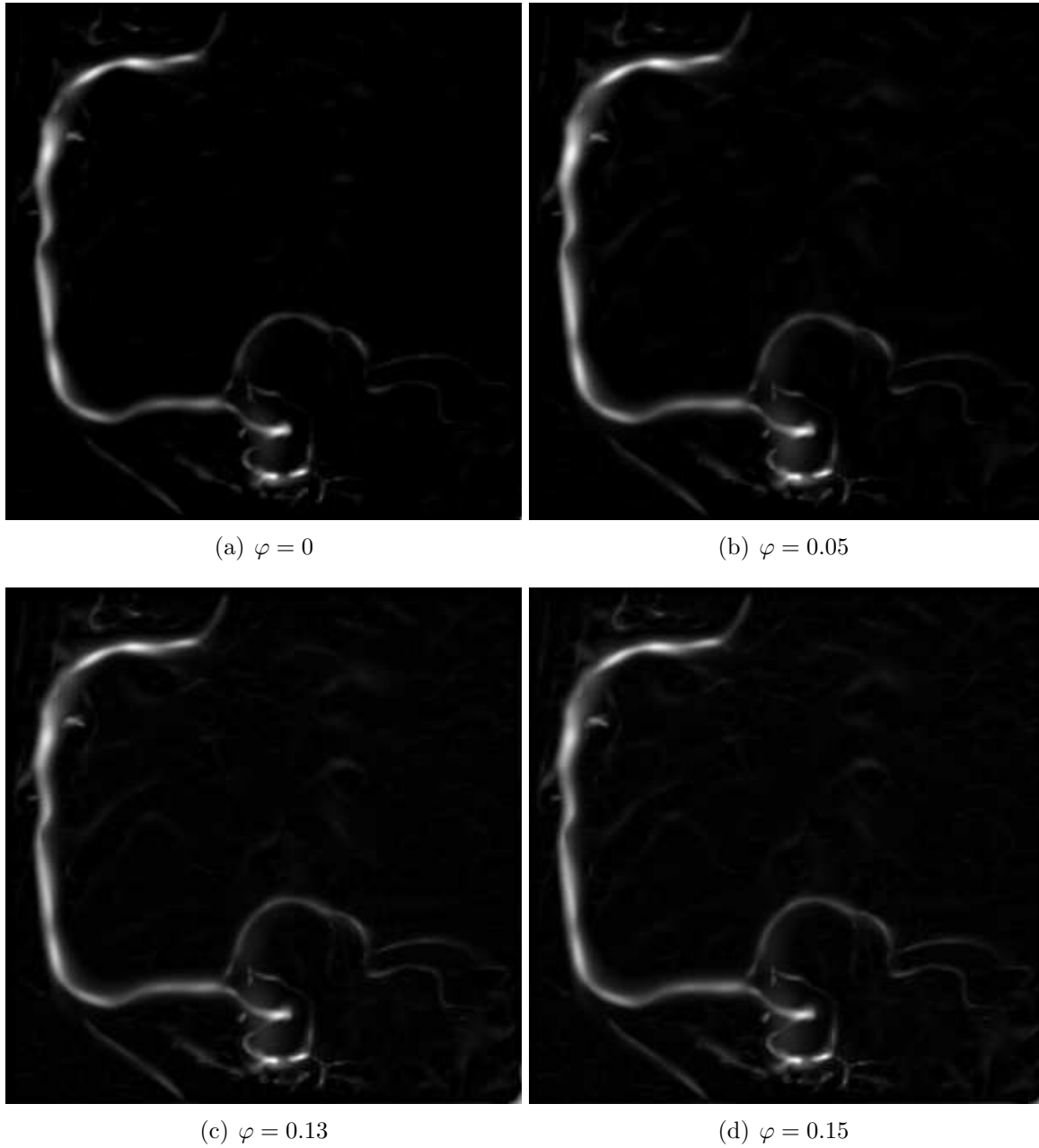


Figura 3.18: Imágenes resultantes de realzado de vasos sanguíneos usando la matriz Hessiana fraccionaria de orden  $\varphi \geq 0$ . Cuando  $\varphi = 0$  se obtiene la solución ordinaria (a).



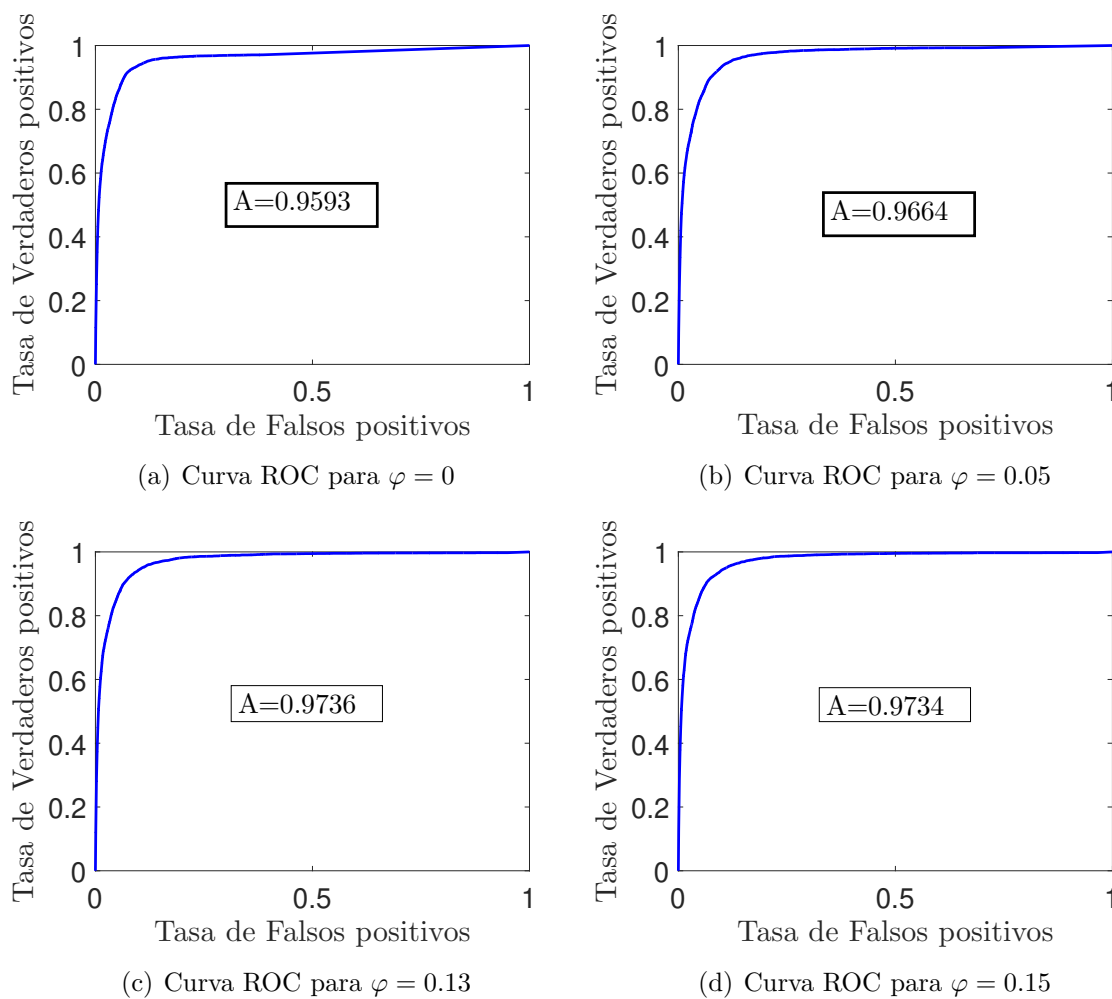


Figura 3.19: Gráficas de las Curvas ROC para diferentes valores de  $\varphi$  y las áreas encontradas.

$\varphi \geq 0.15$ . Además se puede ver por inspección visual que a medida que  $\varphi$  está en  $0 < \varphi < 0.15$ , se pueden distinguir más rasgos y detalles de los vasos sanguíneos.

#### 3.4.4. Conclusiones

En este trabajo se implementó un sistema para realzado de angiogramas de coronarias, basado en la obtención de derivadas fraccionarias, utilizando la derivada fraccionaria GL. Se realizaron muchas pruebas a un pequeño conjunto de angiogramas manteniendo constantes los parámetros de  $\sigma$  y variando la derivada fraccionaria  $\varphi$ . Los resultados muestran que, a pesar de utilizar un conjunto pequeño de angiogramas, existe mejoría en los valores de área de la curva ROC, Cuando se utilizan valores de derivada en  $0 < \varphi < 0.15$ , en cambio los valores de área decrecen si  $\varphi > 0.15$ . Esta mejora en el realzado de angiogramas puede ayudar a obtener mejores resultados en los algoritmos de segmentación automática.

## Capítulo 4

# Conclusiones y perspectivas

*Lo que realmente embellece al desierto  
–dijo el principito–  
es el pozo que se oculta en algún sitio . . .  
El principito*

*Antoine de Saint-Exupéry*

## Conclusiones

Desde su descubrimiento en el siglo XVII hasta la actualidad, el cálculo fraccionario ha evolucionado de manera significativa. Comenzando con las primeras fórmulas que rompieron el paradigma de la derivación de orden entero, hasta los operadores fraccionarios propuestos en los últimos años. Sin embargo, el cambio más significativo se dio a partir de los años 70's, cuando, gracias a la derivada fraccionaria propuesta por M. Caputo se pudo prescindir de las condiciones iniciales de orden no entero que aparecían al resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias y cuya interpretación física era difícil. Así, esta nueva definición y las que han aparecido últimamente se están

aplicando a prácticamente a todos los campos de conocimiento.

Se propusieron modelos fraccionarios de Drude utilizando los operadores DCF y ABC, además, se consideraron los casos en los que los electrones son estimulados por: un campo eléctrico constante, un campo descrito por un pulso y por un campo tipo oscilatorio. Se encontró que la densidad de corriente depende del tiempo, del campo eléctrico utilizado y también del orden de la derivada fraccionaria  $\gamma$ , donde  $0 < \gamma \leq 1$ . Cuando  $\gamma = 1$  se regresa a las soluciones ordinarias en todos los casos. Se mostró que cuando se usan diferentes operadores fraccionarios cambian los comportamientos cuando  $\bar{t} \rightarrow 0$  y cuando  $\bar{t} \rightarrow \infty$ .

Se propusieron modelos fraccionarios para los circuitos eléctricos RC, RL y RLC, utilizando la derivada fraccionaria conformable. Al simplificar las ecuaciones diferenciales fraccionarias conformables se obtuvieron ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes variables de potencias no enteras. Las soluciones obtenidas de los modelos de los circuitos son graficadas. En el caso de la solución del circuito RC con la derivada conformable se hizo una comparación con la solución con la derivada de Caputo. Se mostró que al igual que las soluciones encontradas con la derivada de Caputo y con otros operadores, la solución fraccionaria encontrada depende del tiempo  $t$  y el orden de derivada  $0 < \gamma \leq 1$  y que en el caso particular cuando  $\gamma = 1$  se regresa a la solución ordinaria de los circuitos eléctricos.

Con el fin de ayudar en el mejoramiento de angiogramas para tareas de segmentación automática de vasos sanguíneos se implementó un sistema para realzados de angiogramas de coronarias basado en la obtención de una matriz Hessiana de orden fraccionario

$2 + \varphi$  utilizando la derivada fraccionaria GL. Se realizaron pruebas a un pequeño conjunto de angiogramas, manteniendo constantes los parámetros de  $\sigma$  y variando la

---

derivada fraccionaria  $\varphi$ . Los resultados muestran que, a pesar de utilizar un conjunto pequeño de angiogramas, existe evidencia de mejoría en los valores de área bajo de la curva ROC, cuando se utilizan valores de derivada en  $0 < \varphi < 0.15$ , en cambio los valores de área decrecen  $\varphi > 0.15$ . Esta modificación ayuda a obtener mejores resultados en los algoritmos de segmentación automática.

## Perspectivas

A medida que se van descubriendo nuevos operadores, los modelos fraccionarios se pueden probar con las nuevas definiciones que van surgiendo. Además, otro aspecto a tomar en cuenta es la posibilidad de comparar datos experimentales con las soluciones propuestas. En este sentido se muestran los posibles trabajos a futuro:

- Análisis del modelo de Drude con la derivada fraccionaria conformable.
- Análisis experimental del modelo de Drude y la comparación con modelos fraccionarios.
- Análisis en frecuencia del modelo de Drude con operadores sin kernel regular.
- Análisis de modelos fraccionarios de semiconductores.
- Análisis experimental de modelos fraccionarios.
- Análisis experimental de circuitos eléctricos y la comparación con el modelo fraccionario conformable.
- Solución analítica de la matriz Hessiana fraccionaria y su aplicación a realzado de angiogramas.
- Modificación del algoritmo de Salem para realzado de angiogramas [127].
- Detección de bordes usando máscaras con la derivada Caputo-Fabrizio.
- Diseño de filtros para procesamiento de señales por medio de derivadas de orden fraccionario.

# Apéndice A

## Productos Científicos y trabajos presentados

En este apartado se presentan los títulos y portadas de los artículos publicados y los trabajos presentados.

### Artículos publicados

- M. Guía, J.J. Rosales, **L. Martínez**, and J.A. Álvarez. *Fractional drude model of electrons in a metal*. Rev. Mex. de Fís. 62, 155-159, 2016.
- **Leonardo Martínez Jiménez**, J. Juan Rosales García, Abraham Ortega Contreras, and Dumitru Baleanu. *Analysis of Drude model using fractional derivatives without singular kernels*. Open Phys.,15, 627-636, 2017.
- A. Ortega, J.J. Rosales, **L. Martínez**, C.A. Carreño. *Fractional optical properties of Drude model*. Optik. 161, 244-249, 2018.

- 
- **L. Martínez**, J.J. Rosales, C.A. Carreño, and J.M. Lozano. *Electrical circuits described by fractional conformable derivative*. Int. J. Circ. Theor. Appl., 1-10. <https://doi.org/10.1002/cta.2475>, 2018.
  - A. Ortega, J.J. Rosales, **L. Martínez**, and J.M. Cruz-Duarte. *Analysis of projectile motion in view of conformable derivative*. Open Phys., Aceptado, 2018.

## Proceedings

- **L. Martínez-Jiménez**, J.M. Cruz-Duarte, I Cruz-Aceves, and J.J. Rosales. *Enhancement of Vessels in Coronary Angiograms Using a Hessian Matrix Based on Grunwald-Letnikov Fractional derivative*. 2018 8th International Conference on Biomedical Engineering and Technology (ICBET 2018), Bali, Indonesia, April 23-25, Aceptado, 2018.

## Artículos sometidos

- **L. Martínez-Jiménez**, J.M. Cruz-Duarte, and J.J. Rosales-García. *Fractional solution of the catenary curve*. Adv. in Math. Phys. J., 2018.

**Fractional drude model of electrons in a metal**

M. Guía, J.J. Rosales, L. Martínez, and J.A. Álvarez

*División de Ciencias e Ingenierías Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato, Carretera Salamanca-Valle de Santiago, km. 3.5 + 1.8 km. Comunidad de Palo Blanco, Salamanca, Guanajuato.*

Received 3 August 2015; accepted 8 December 2015

In the present work we analyse the behaviour of electrons in a metal placed into uniform electric field,  $E$ , from its fractional differential equation. We show that the velocity and the current density of the electrons not only depend on the time  $t$ , but also on the order of the fractional differential equation  $\gamma$ , the Drude model is a particular case. This fact could have interesting consequences in the study of electrical properties of metals.

*Keywords:* Fractional derivative; drude model; Mittag-Leffler function.

PACS: 45.10.Hj; 45.20.D; 66.70.Df

**1. Introduction**

Fractional calculus (FC) is the generalization of the ordinary integer calculus that deals with operators having non-integer order: fractional derivatives and fractional integrals [1-4]. The FC provide an excellent instrument for the description of memory and hereditary properties of various materials and processes [5-9]. This is the main advantage of FC in comparison with ordinary integer calculus, in which such effects are in fact neglected. In the last few decades the FC and fractional differential equations have found applications in science and various engineering disciplines [10-13].

Recently, at the work [14] it was shown that the fractional order Gompertz model of order 0.68 produced a better fit to experimental dataset than the well-known Gompertz model. On the other hand, at [15] charging and discharging processes of different capacitors in electrical RC circuit has been considered theoretically and experimentally. It was shown that, the measured experimental results could be exactly obtained within the fractional calculus approach for the order 0.998.

In the present work we analyse the behaviour of electrons in a metal placed into uniform electric field from its fractional differential equation. We show that its behavior depends on the fractional order of the differential equation and its solutions are given by the Mittag-Leffler function. We consider here both DC and AC electric field.

**2. Basic Concepts of Fractional Calculus**

In this work we use the Caputo fractional derivative defined as [2]

$$\frac{d^\gamma f(t)}{dt^\gamma} = {}_0^C D_t^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\eta)}{(t-\eta)^{\gamma-n+1}} d\eta \quad (1)$$

where  $\Gamma(\cdot)$  denotes the Euler Gamma function,  $n = 1, 2, \dots \in \mathbb{N}$  and  $n - 1 < \gamma \leq n$ , where  $\gamma$  is the

fractional order derivative. In this definition  $f^{(n)}$  is an ordinary derivative. The Laplace transform of the Caputo's fractional derivative has the form [2]

$$\mathcal{L} \left[ {}_0^C D_t^\gamma f(t) \right] = s^\gamma F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\gamma-k-1} f^{(k)}(0) \quad (2)$$

The classical Mittag-Leffler function is a complex function depending on a complex parameter and was defined and studied by Mittag-Leffler [16-18], as

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \quad \text{Re}(\alpha > 0) \quad (3)$$

This function is a generalization of the exponential function since for  $\alpha = 1$  we have  $e^z$ . The generalization of the function (3) is given by

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \quad \text{Re}(\alpha > 0) \quad \text{Re}(\beta > 0) \quad (4)$$

Note that  $E_{\alpha,1} = E_\alpha$ . This generalization was studied by Wiman [19]. The Laplace transform of the function  $t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$  is given by

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha) dt = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha \mp a} \quad (5)$$

Consequently, the inverse Laplace transform is

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha \mp a} \right] = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha) \quad (6)$$

Some useful here Laplace transform are [2]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ 1 - E_\alpha(-at^\alpha) \right] &= \frac{a}{s(s^\alpha + a)} \\ \mathcal{L} \left[ \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right] &= \frac{1}{s^\alpha} \\ \mathcal{L} \left[ E_\alpha(\pm at^\alpha) \right] &= \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha \pm a} \end{aligned} \quad (7)$$





## Research Article

Leonardo Martínez Jiménez, J. Juan Rosales García\*, Abraham Ortega Contreras, and Dumitru Baleanu

## Analysis of Drude model using fractional derivatives without singular kernels

<https://doi.org/10.1515/phys-2017-0073>  
Received Apr 05, 2017; accepted Aug 04, 2017

**Abstract:** We report study exploring the fractional Drude model in the time domain, using fractional derivatives without singular kernels, Caputo-Fabrizio (CF), and fractional derivatives with a stretched Mittag-Leffler function. It is shown that the velocity and current density of electrons moving through a metal depend on both the time and the fractional order  $0 < \gamma \leq 1$ . Due to non-singular fractional kernels, it is possible to consider complete memory effects in the model, which appear neither in the ordinary model, nor in the fractional Drude model with Caputo fractional derivative. A comparison is also made between these two representations of the fractional derivatives, resulting a considered difference when  $\gamma < 0.8$ .

**Keywords:** Fractional Calculus, Drude model, Caputo-Fabrizio derivative, Atangana-Baleanu derivative

**PACS:** 45.10.Hj, 45.20.D, 66.70.Df

### 1 Introduction

Fractional calculus (FC), involving derivatives and integrals of non-integer order, is the natural generalization of classical calculus, which during recent decades has become a powerful and widely used tool for better modelling and control of processes in many areas of science and engineering [1–11]. The fractional derivatives are non-

local operators because they are defined using integrals. Therefore, the fractional derivative in time contains information about the function at earlier points, thus it possesses a memory effect, and it includes non-local spatial effects. In other words, such derivatives consider the history and non-local distributed effects which are essential for better and more precise descriptions and understanding of complex and dynamic system behaviour. Due to the lack of a consistent geometric and physical interpretation of the fractional derivative, several definitions of fractional derivatives and integrals exist, see [12] for a review of definitions for fractional derivatives and integrals. These definitions include, Riemann-Liouville, Grunwald-Letnikov, Caputo, and Weyl, among others. The most used definitions are the Riemann-Liouville and the Caputo fractional derivatives. There are classical applications where FC has showed its great capabilities, such as the tauchronne problem [13], models based on memory mechanisms [14], fractional diffusion equations [15], new linear capacitor theory [16], the non-local description of quantum dynamics like Brownian motion and anomalous diffusion [17, 18]. Other interesting applications are given in viscoelastic materials [19–24], anomalous non-Gaussian transport [25] and dielectric materials [26–29].

The concept of a fractional curl operator and a fractional paradigm in electromagnetic theory was introduced in [30]. The application of the fractional curl operator to different electromagnetic problems is discussed in [31–33]. In [34, 35] it is shown that the electromagnetic fields and waves in a wide class of dielectric materials are described by fractional differential equations with derivatives of non-integer order with respect to time. The order of these derivatives is defined by exponentials of the universal response laws for frequency dependence of the dielectric susceptibility. In [36] proposed a systematic way to construct fractional differential equations and applied them to the propagation of electromagnetic waves in an infinitely extended homogeneous medium at rest.

Despite the accurate results obtained with the Riemann-Liouville and Caputo fractional derivatives, they have the disadvantage that their kernel has a singularity

\*Corresponding Author: J. Juan Rosales García: División de Ingenierías Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato, Carretera Salamanca-Valle de Santiago, Salamanca, Guanajuato, México; Email: rosales@ugto.mx

Leonardo Martínez Jiménez, Abraham Ortega Contreras: División de Ingenierías Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato, Carretera Salamanca-Valle de Santiago, Salamanca, Guanajuato, México

Dumitru Baleanu: Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Arts and Sciences, Cankaya University, 06530 Ankara, Turkey

Open Access. © 2017 L. Martínez *et al.*, published by De Gruyter Open. NonCommercial-NoDerivatives 4.0 License



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-

Unauthenticated  
Download Date | 11/17/17 2:34 AM

Optik 161 (2018) 244–249



Contents lists available at ScienceDirect

Optik

journal homepage: [www.elsevier.de/ijleo](http://www.elsevier.de/ijleo)



Original research article

## Fractional optical properties of Drude model

A. Ortega\*, J.J. Rosales, L. Martínez, C.A. Carreño

*División de Ingenierías Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato, Carretera Salamanca-Valle de Santiago, km. 3.5 + 1.8 km, Comunidad de Palo Blanco, Salamanca, Guanajuato, Mexico*



### ARTICLE INFO

*Article history:*  
Received 17 November 2017  
Accepted 19 January 2018

*Keywords:*  
Fractional conductivity  
Drude model  
Fractional derivative

### ABSTRACT

In this work we study the optical properties of metals applying the Caputo fractional derivative. We obtain the generalization of the complex electric conductivity and the complex dielectric function. These functions depend on frequency and on the order of the fractional differential equation  $0 < \gamma \leq 1$ . In this way, we have an additional degree of freedom that gives the possibility to describe scenarios with new information about the system, as it can be seen from the graphs obtained using the MatLab software.

© 2018 Elsevier GmbH. All rights reserved.

### 1. Introduction

In the last years, a great interest has been devoted to the use of fractional calculus (FC) in several areas of the knowledge. This is due to its powerful and widely used tool for better modelling and control of processes in many areas of science and engineering, including capacitor theory [1], anomalous diffusion [2,3], memory mechanism [4,5], bioengineering [6], electromagnetic waves [7,8], fractional electrical circuits [9,10], fractional order control [11,12] and nanotechnology [13]. The FC takes into account the history and non-local distributed effects, which are essential for better and more precise description and understanding of the complex and dynamic system behavior.

Motivated by this fractional calculus in [14], the behavior of electrons in a metal placed into uniform electric field  $\vec{E}$  from its fractional differential equation, was analyzed. However, the most interesting cases of interaction of light with matter were found in the frequency domain, since we could analyze its optical properties [15,16]. This model has been successfully applied to various transparent conductive oxides and films [17,18]. The Drude model was also applied in the THz time domain spectroscopy for film characterization [19,20]. In [21] it was shown how the Drude model can be improved by including interband absorption and temperature effect in the damping coefficients. In [22], free electron behavior below the interband transition using Drude model with plasma frequency was studied. This model is consistent with most optical and plasmon experiments, such as typical surface plasmon propagation length and particle plasmon resonance lifetimes. In [23,24], it was modified the frequency dependent complex electric conductivity of Drude theory to include the Cole-Davidson fractional exponent  $\beta$  and thereby achieving an exceptional fit to all of their measurements.

In this short communication, we are interested in the theoretical study of the optical properties of the Drude model within the framework of the fractional calculus, in particular, we used the Caputo fractional derivative.

\* Corresponding author.  
E-mail address: [a.ortegacontreras@ugto.mx](mailto:a.ortegacontreras@ugto.mx) (A. Ortega).

<https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2018.01.060>  
0030-4026/© 2018 Elsevier GmbH. All rights reserved.

## Electrical circuits described by fractional conformable derivative

L. Martínez | J.J. Rosales  | C.A. Carreño | J.M. Lozano

División de Ingenierías Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato, Carretera Salamanca-Valle de Santiago km 3.5 + 1.8 km, Comunidad de Palo Blanco, Salamanca, Guanajuato, México

### Correspondence

L. Martínez, División de Ingenierías Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato, Carretera Salamanca-Valle de Santiago km 3.5 + 1.8 km, Comunidad de Palo Blanco, Salamanca, Guanajuato, México.  
Email: leonardomj@ugto.mx

### Summary

In the last 3 years, the fractional conformable derivative and its properties have been introduced. Unlike other definitions, this new fractional derivative is based on the basic limit definition of the derivative and satisfies the same formulas of derivation, such as product and quotient of 2 functions and the chain rule. Using this new derivative, we obtain a new class of linear ordinary differential equations with noninteger power variable coefficients for the Resistance Capacitance (RC), Inductance Capacitance (LC), and Resistance, Inductance Capacitance (RLC) electric circuits. The numerical solutions are solved through the Matlab software. Solutions depend on time and on the fractional order parameter  $0 < \gamma \leq 1$ . The computing using this new derivative is much easier than using other definitions of fractional derivative. It has been shown that in the particular case  $\gamma = 1$ , these solutions become the ordinary ones. Also, a comparison has been made with the Caputo fractional derivative for the case of the RC circuit with constant source.

### KEYWORDS

conformable derivative, electrical circuits, fractional derivative

## 1 | INTRODUCTION

Fractional calculus (FC) is the natural generalization of the ordinary calculus involving derivatives and integrals of noninteger order. During the last 30 years, FC has attracted much attention because of its powerful and widely used tool for better modelling and control of processes in many areas of science and engineering.<sup>1-9</sup> The fractional derivatives are nonlocal operators, because they are defined using integrals. Therefore, the fractional derivative in time contains information about the function at earlier points; thus, it possesses a memory effect, and it includes nonlocal spatial effects. In other words, they consider the history and nonlocal distributed effects, which are essential for the better and more precise description and understanding of the complex and dynamic system behaviour. Nowadays, there are several definitions of fractional derivatives and integrals.<sup>10</sup> These definitions include Riemann-Liouville, Grunwald-Letnikov, Caputo, Weyl,<sup>11-15</sup> and more recently, Caputo and Fabrizio<sup>16</sup> and Atangana and Baleanu.<sup>17</sup> One of the problems encountered in the field is what kind of fractional derivative will replace the ordinary derivative for a given problem. The most used definitions are the Riemann-Liouville and the Caputo fractional derivatives. There are classical applications where FC has shown its capabilities, such as the tautochrone problem,<sup>18</sup> models based on memory mechanism,<sup>19</sup> fractional diffusion equation,<sup>20</sup> new linear capacitor theory,<sup>21</sup> and the nonlocal description of quantum dynamics like Brownian motion and anomalous diffusion<sup>22</sup>; in Teka et al,<sup>23</sup> several properties of the fractional-order leaky integrate and fire model described by complex multiple time scale neuronal dynamic were studied.



Research Article

A. Ortega, J.J. Rosales\*, L. Martínez, and J. M. Cruz–Duarte

# Analysis of projectile motion in view of conformable derivative

<https://doi.org/???>

Received May 10, 2017; accepted Apr 11, 2018

**Abstract:** This paper presents new solutions for two-dimensional projectile motion in a free and resistive medium, obtained within the newly established conformable derivative. For free motion, we obtain analytical solutions and show that the trajectory, height, flight time, optimal angle, and maximum range depend on the order of the conformable derivative,  $0 < \gamma \leq 1$ . Likewise, we analyse and simulate the projectile motion in a resistive medium by assuming several scenarios. The obtained trajectories never exceed the ordinary ones, given by  $\gamma = 1$ , unlike results reported in other studies.

**Keywords:** Fractional calculus, conformable fractional derivative, projectile motion, trajectory, range, height, flight time

**PACS:** 45.10.Hj; 45.20.D; 02.30.Hq; 47.10.A

## 1 Introduction

In the last three decades, much work has been performed on fractional calculus (FC). FC is the natural generalization of ordinary derivatives and integrals. It deals with operators having a non-integer (arbitrary) order. Today, there are excellent books and reviews on fractional calculus and its applications in science and engineering [1–7]. FC has been employed in numerous practical and theoretical problems, but, for the sake of brevity, we mention a few of them as follows: the design of optimal control systems [8]; the analysis of anomalous relaxation and diffusion processes [9], and the regularized long-wave equation [10];

the study of a bead sliding on a wire [11]; and the investigation of chaotic systems [12], heat conduction [13], nerve impulse transmission [14], chemical kinetic systems [15], and oscillating circuits [16]. However, this generalization of the ordinary calculus is still inconsistent in physical and geometric interpretation, because several definitions of fractional derivatives have been proposed. These definitions include the Riemann-Liouville, Grunwald-Letnikov, Weyl, Caputo, Marchaud and Riesz fractional derivatives [1–5]. These fractional derivatives seldom satisfy the well-known formulae, e.g., the product, quotient, and chain rules. As a result, researchers have been trying to construct new definitions of fractional derivatives and integrals. As an illustrative example, helpful work on the theory of derivatives and integrals is done in [17].

**Definition:** Let  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  be a function. Then, the  $\gamma$ -th order conformable derivative of  $f$  is defined by [17] as

$$T_\gamma(f)(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\gamma}) - f(t)}{\epsilon}, \quad \forall t > 0, \quad (1)$$

where  $\gamma \in (0, 1]$ . If  $f$  is  $\gamma$ -differentiable in some  $(0, a)$ ,  $a > 0$ , and  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^\gamma(t)$  exists, then, it is defined as

$$f^\gamma(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^\gamma(t), \quad (2)$$

and the conformable integral of a function,  $I_\gamma^\alpha(f)(t)$ , starting from  $a \geq 0$ , is defined as,

$$I_\gamma^\alpha(f)(t) = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\gamma}} dx. \quad (3)$$

The integral is the usual Riemann improper integral, and  $\gamma \in (0, 1]$ . The most important properties of this conformable derivative are given in the following theorem.

**Theorem:** Let  $\gamma \in (0, 1]$ , and  $f$  and  $g$  be  $\gamma$ -differentiable at any point  $t > 0$ . Then,

1.  $T_\gamma(af + bg) = aT_\gamma(f) + bT_\gamma(g)$  for all  $a, b \in \mathbb{R}$ ,
2.  $T_\gamma(t^p) = pt^{p-\gamma}$  for all  $p \in \mathbb{R}$ ,
3.  $T_\gamma(\lambda) = 0$  for all constant function  $f(t) = \lambda$ ,
4.  $T_\gamma(fg) = fT_\gamma(g) + gT_\gamma(f)$ ,
5.  $T_\gamma\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\gamma(f) - fT_\gamma(g)}{g^2}$ ,
6.  $T_\gamma(f)(t) = t^{1-\gamma} \frac{df}{dt}$ , if  $f$  is differentiable.

\*Corresponding Author: J.J. Rosales: División de Ingenierías Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato, Carretera Salamanca-Valle de Santiago, km. 3.5 + 1.8 km., Comunidad de Palo Blanco, Salamanca, Guanajuato, México ; Email: rosales@ugto.mx  
 A. Ortega, L. Martínez, J. M. Cruz–Duarte: División de Ingenierías Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato, Carretera Salamanca-Valle de Santiago, km. 3.5 + 1.8 km., Comunidad de Palo Blanco, Salamanca, Guanajuato, México

# Referencias

- [1] J. Espíndola, C. Bavastri and E.D.O. Lopes. Design of optimum systems of viscoelastic vibration absorbers for a given material based on the based on the fractional calculus model. *Journal of vibration and control*, 14 (9-10), 1607-1630, 2008.
- [2] F.B. Duarte, and J.A.T. Machado. Fractional dynamics in the describing function analysis of nonlinear friction. *Proceedings of the 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications*, 2 Jul, 2006.
- [3] P.J. Torvik, and R.L. Bagley. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials. *Journal of Applied Materials*, 5 (2), 294-298, 1984.
- [4] J.F. Gómez-Aguilar. *Aplicación del Cálculo Fraccionario al Modelado de Sistemas Biofísicos, Bioeléctricos y Mecánicos*, PhD Thesis, Universidad de Guanajuato, 2012.
- [5] G.W. Leibniz. Letter from Hanover, Germany, September 30, 1695, to G. A.L'Hôpital, *Leibnizen Mathematische Schriften*, vol. 2, 301-302, Olms Verlag, Hildesheim, Germany. 1962 First published in 1849.
- [6] G.W. Leibniz. Letter from Hanover, Germany, May 28, 1697 to J. Wallis, *Leibnizen Mathematische Schriften*, vol. 4, p. 25, Olms Verlag, Hildesheim, Germany. 1962 First published in 1859.

- [7] J.M. Sánchez-Muñoz. *Historias de Matemáticas - Génesis y desarrollo del Cálculo Fraccional*. Pensamiento Matemático, 1, 1-15,2011.
- [8] S.F. Lacroix. *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*, Courcier, 2nd. Ed., Paris, 1819.
- [9] J.B.J. Fourier. *Théorie Analytique de la Chaleur*, Ouvres de Fourier, Didot, Paris, 1822.
- [10] N.H. Abel. *Résolution d'un problème de mécanique*. Oeuvres Complètes (tomo premier, pp. 27-30). Göndah: Christiana, 1839a.
- [11] J. Liouville. *Mémoire sur le Calcul des Différentielles à Indices Quelconques*. J. Ecole Polytech., 13, Section 21, 71-162, 1832.
- [12] J. Liouville. *Sur une formule pour les différentielles à indices quelconques à l'occasion d'un mémoire de M. Tortolini*. J. Math pures App., 1855.
- [13] K.B. Oldham, and J. Spanier. *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York, 1974.
- [14] K.S. Miller, and B. Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley, NY, 1993.
- [15] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, New York, 1999.
- [16] P. Williams. *Fractional Calculus of Schwartz Distributions*. Bachelor Thesis, The University of Melbourne, 2007.
- [17] R. Prieto-Curiel. *El Cálculo Generalizado y las Funciones Fraccionarias*. Bachelor Thesis, ITAM, 2009.
- [18] D. Baleanu, Z.B. Günvenc, and J.A. Tenreiro Machado. (Eds) *New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications*. Springer, 2010.

- [19] K.G. Alireza, and L. Lambert. Investigations in Dynamics: with Focus on Fractional Dynamics. Academic Publishing, 2012.
- [20] D. Baleanu. Fractional Calculus Models and Numerical Methods. World Scientific Publishing Company, 2012.
- [21] V. Uchaikin. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Springer, 2013.
- [22] E. Artin. The Gamma Function. Dover Publications Inc., New York, 2015.
- [23] G.M. Mittag-Leffler. *Sur la nouvelle fonction  $E_\alpha(x)$* . Comptes Rendus de l' Academie des Sciences Paris, 137, 554-558, 1903.
- [24] G.M. Mittag-Leffler, *Une generalisation de l' integrale de Laplace-Abel*. Comptes Rendus de l' Academie des Sciences Paris Serie II, 137, 537-539, 1903.
- [25] G.M. Mittag-Leffler. *Sur la representation analytique d'une fonction monogene (cinquieme note)*, Acta Mathematica, 29 (1), 101-181, 1905.
- [26] A. Wiman. *Über die Nullstellun der Funktionen  $E_\alpha(x)$* , Acta Mathematica, 29, 217-234, 1905.
- [27] A. Wiman, *Über den fundamentalsatz in der theorie der funktionen  $E_\alpha(x)$* , Acta Math., 29, 191-201, 1905.
- [28] R.P. Agarwal. *A propos d' une note de M. Pierre Humbert*, Comptes Rendus de l' Academie des Sciences Paris, 236, 203-2032, 1953.
- [29] P. Humbert, and R.P. Agarwal. *Sur la fonction de Mittag-Leffler et quelques unes de ses generalizations*, Bulletin of Science and Mathematics Series II, 77, 180-185, 1953.
- [30] T.R. Prabhakar. *A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel*, Yokohama Math. J., 19, 7-15, 1971.

- [31] M.A. Özarslan, and Y. Yaşar, B: The Extended Mittag-Leffler's Function and Its Properties, Journal of Inequalities and Applications, 2013.
- [32] M.A. Khan, and S. Ahmed. *On some properties of the generalized Mittag-Leffler function*, Springer plus, 2, 337, 2013.
- [33] M.D. Ortigueira. *Fractional Calculus for Scientists and Engineers*. Springer, NY, 2011.
- [34] R. Scherer, S.L. Kalla, Y. Tang, and J. Huang. *The Grünwald-Letnikov method for fractional differential equations*. Comp. and Math. with App., 62, 902-917, 2011.
- [35] M. Caputo, and F. Mainardi. *A new dissipation model based on memory mechanism*. Pure Appl. Geophys., 91, 134-147, 1971.
- [36] M. Caputo and M. Fabrizio. *A new definition of fractional derivative without singular kernel*. Progr. Fract. Differ. Appl., 1, 73-85, 2015.
- [37] J. Losada and J.J. Nieto. *Properties of a new fractional derivative without singular kernel*. Progr. Fract. Differ. Appl., 1, 87-92, 2015.
- [38] A. Atangana, and D. Baleanu. *New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel, theory and application to heat transfer model*, Thermal Science, 20(2), 763-769, 2016.
- [39] A. Atangana and Badr Saad T. Alkahtani. *Analysis of the Keller-Segel model with a fractional derivative without singular kernel*. Entropy, 17, 4439-4453, doi: 10.3390/e17064439, 2015.
- [40] N.A. Sheikh, F. Ali, M. Saqib, I. Khan, and S.A.A. Jan. *A comparative study of Atangana-Baleanu and Caputo-Fabrizio fractional derivatives to the convective flow of a generalized Casson fluid*. Eur. Phys. J. Plus. 132, 54, doi: 10.1140/epjp/i2017-11326-y, 2017.



- [41] O.J.J. Algahtani. *Comparing the Atangana-Baleanu and Caputo-Fabrizio derivative with fractional order: Allen Cahn model*. Chaos, Solitons and Fractals. 89, 552-559, 2016.
- [42] R. Khalil, M.Al. Horani, A. Yousef, and M. Sababheh. *A new definition of fractional derivative*. J. Comp. Appl. Math. 264, 65-70, 2014.
- [43] A. Atangana. *Derivative With a New Parameter: Theory, and Applications*. Elsevier, London UK, 2016.
- [44] V.E. Tarasov. *Local Fractional Derivatives of Differentiable Functions are Integer-order Derivatives or Zero*. Int. J. of App. and Com. Maths., 2(2), 1-9, 2016.
- [45] M.D. Ortigueira, and J.T. Machado. *A critical analysis of the Caputo-Fabrizio operator*. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 59, 608-61, 2018.
- [46] V.E. Tarasov. *No nonlocality. No fractional derivative*, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 62, 157-163, 2018.
- [47] A. Atangana, and A. Secer. *A note on fractional order derivatives and table of fractional derivatives of some special functions*. Abstract and Applied Analysis 2013, Article ID: 279681, 2013.
- [48] K. Sau Fa, *A falling body problem through the air in view of the fractional derivative approach*, Physica A, 350, 199-206, 2005.
- [49] A. Ebaid. *Analysis of projectile motion in view of fractional calculus*, Appl. Math. Modelling, 35, 1231-1239, 2011.
- [50] J.F. Gómez-Aguilar, J.J. Rosales-García, J.J. Bernal-Alvarado, T. Córdova-Fraga, and R. Guzmán-Cabrera, *Fractional Mechanical Oscillator*, Rev. Mex. Fís., 58, 348, 2012.

- [51] J.J. Rosales García, M. Guía, J. Martínez and D. Baleanu, *Motion of a particle in a resistive medium using fractional calculus approach*, Proceed. Rom. Acad. Ser. A., 14, 42-47, 2013.
- [52] J.J. Rosales, M. Guía, F. Gómez-Aguilar, and J. Martínez, *Two-dimensional fractional projectile motion in a resisting medium*, Cent. Eur. J. Phys., 12(7), 517-520, 2014.
- [53] B. Ahmad, H. Batar, J.J. Nieto, O. Otero-Zarragui nos, and W. Shammakh. *Projectile motion via Riemann-Liouville calculus*. Adv. Di. Equations, 63, 1, 2015.
- [54] A. Ebaid. *Analysis of projectile motion in view of fractional calculus*. Appl. Math. Modelling, 35, 1231-1239, 2011.
- [55] K. Sau Fa, *A falling body problem through the air in view of the fractional derivative approach*. Physica A, 350, 199-206, 2005.
- [56] J.J. Rosales, M. Guía, F. Gómez, F. Aguilar, J. Martínez, *Two dimensional fractional projectile motion in a resisting medium*. Cent. Eur. J. Phys. 12 (7), 517-520, 2014.
- [57] J. Hristov. *Space-fractional diffusion with a potential power-law coefficient: transient approximate solution*. Prog. in Frac. Diff. and App., 3, 1, 19-39, 2017.
- [58] W. Wyss. *Fractional diffusion equation*, J. Math. Phys., 27, 2782-2785, 1986.
- [59] S. Westerlund, *Causality*, Report No.940426, University of Kalmar, 1994.
- [60] S. Westerlund. Capacitor theory, IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation, 1(5), 826-839, 1994.
- [61] R. Hermann. Fractional Calculus, New Jersey, World Scientific, 2011.
- [62] R. Metzler, and J. Klafter. *The random walk's guide to anomalous diffusion a fractional dynamics approach*, Phys. Reports, 339, 1-77, 2000.

- [63] H. Schiessel, R. Metzler, and A. Blumen, and F. Nonnenmacher. *Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions*, J. Phys. A.: Math. Gen, 28, 6567-6584, 1995.
- [64] S. Muller, M. Kastner, J. Brummund, and V. Ulbricht. *A nonlinear fractional viscoelastic material model polymers*, ComputationalMaterials Science, 50, 2938-2949, 2011.
- [65] I. Colombaro, A. Giusti, and F. Mainardi. *A class of linear viscoelastic models based on Bessel functions*, Mecanica, 52, 825-832, 2017.
- [66] A. Giusti, and F. Mainardi, *A dynamic viscoelastic analogy for fluid-filled elastic tubes*, Mecanica 2016, 51, 2321-2330, 2016.
- [67] F.C. Meral, T.J. Roytson, and R. Magin. *Fractional calculus in viscoelasticity: An experimental study*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat, 15, 939-945, 2010.
- [68] A. Giusti, and I. Colombaro. *Prabhakar-like fractional viscoelasticity*, arXiv:1705.09246v2, math-ph., 2017.
- [69] A. Ebaid, B. Masaedeh, and E. El-Zahar. *A new fractional model for the falling body problem*, Chin. Phys. Lett. 34(2), 020201, 2017.
- [70] R. Garrappa, F. Mainardi, and G. Maione. *Models of dielectric relaxation based on completely monotone functions*, Frac. Calc. and Appl. Analysis, 19, 1105-1160, 2016.
- [71] R. Garrappa, and G. Maione. *Fractional Prabhakar derivative and applicatios in anomalous dielectrics: a numerical approach*, Theory and Applications of Non-Integer Order System. Ed. Babiar, A., Czornik, A., Klamka, J., Niezabitowski, M., Springer, pp. 429-439, 2017.
- [72] R. Garrappa. *Grunwald-Letnikov operators for fractional relaxation in Havriliak-Negami models*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat, 38, 178-191, 2016.

- [73] F. Mainardi, and R. Garrappa. *On complete monotonicity of the Prabhakar function and non-Debye relaxation in dielectrics*, Journal of Computational Physics, 293, 70-80, 2015.
- [74] N. Engheta. *On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism*, IEEE Trans. Antennas Propagat., 44, 554-566, 1996.
- [75] A. Hussain, S. Ishfaq, and Q.A. Naqvi. *Fractional curl operator and fractional waveguides*, Progress in Electromagnetic Research, PIER, 63, 319-335, 2006.
- [76] A. Hussain, M. Faryad, and Q.A. Naqvi. *Fractional curl operator and fractional Chiro-waveguide*, Journ. of Electromagnetic Waves and Application, 21(8), 119-1129, 2007.
- [77] M. Faryad, and Q.A. Naqvi. *Fractional rectangular waveguide*, Progress in Electromagnetic Research, PIER, 75, 383-39, 2007.
- [78] V.E. Tarasov. *Fractional equations of curie-von Schweidler and Gauss laws*, J. Phys. Condens. Matter, 20, 145-212, 2008.
- [79] V.E. Tarasov. *Universal electromagnetic waves in dielectric*, J. Phys. Condens. Matter, 20, 175-223, 2008.
- [80] S. Longhi. *Fractional Schrödinger equation in optics*, Optics Letters, 40(6), 1117-1120, 2015.
- [81] J.M. Cruz-Duarte, J.J. Rosales-García, C.R. Correa-Cely, A. García-Pérez, and J.G. Aviña-Cervantes. *A closed form expression for the Gaussian-based Caputo-Fabrizio fractional derivative for signal processing applications*. C. N. Sci Numer Simulat. 138-148, 2018.
- [82] Y. Wang, Y. Pu, and J. Zhou. *1/2 Order Fractional Differential Tree Type Circuit of Digital Image*, 2008 Congress on Image and Signal Processing, IEEE, 27-30 May 2008, Sanya Hainan China, 2008.

- [83] S. Larnier, and R. Mecca. Fractional-order diffusion for image reconstruction, 2012 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 25-30 March 2012, IEEE, Kyoto Japan, 2012.
- [84] A.C. Sparavigna, and P. Milligan, *Using fractional differentiation in astronomy*, 2009, arXiv:0910.4243v2.
- [85] A.C. Sparavigna, *Fractional differentiation based image processing*, Computer Vision and Pattern Recognition, 2009, arXiv:0910.2381v4.
- [86] Y. Pu, J. Zhou, and X. Yuan, *Fractional Differential Mask: A Fractional Differential-Based Approach for Multiscale Texture Enhancement*, IEEE Tran. on I. Pro., 19 (2), 491-511, 2010.
- [87] A. Melbourne, N. Cahill, C. Tanner, M. Modat, D. J. Hawkes, and S. Ourselin. *Using fractional gradient information in non-rigid image registration: application to breast MRI*, Medical Imaging 2012: Image Processing, Proc. of SPIE Vol. 8314 83141Z, 1-10, 2012.
- [88] P. Drude, *Zur elektronentheorie der metalle*, Ann. der Physik, 306(3), 466-613, 1900.
- [89] P. Drude, *Zur elektronentheorie der metalle; II. Teil. galvanomagnetische und thermomagnetische effecte*, Ann. der Physik, 308(11), 369-402, 1900.
- [90] M. Dressel, and G. Grüner, *Electrodynamics of solids: optical properties of electrons inmatter*, Cambridge University Press, 2002.
- [91] M. Dressel, and M. Scheffler, *Verifying the Drude response*, Ann. Phys, 15, 535-544, 2006.
- [92] M. Guía, J.J. Rosales, L. Martínez, and J.A. Álvarez. *Fractional drude model of electrons in a metal*. Rev. Mex. de Fís., 62, 155-159, 2016.

- [93] A. Ortega, J.J. Rosales, L. Martínez, C.A. Carreño. *Fractional optical properties of Drude model*. Optik. 161, 244-249, 2018.
- [94] L. Martínez-Jiménez, J.J. Rosales-García, A. Ortega-Contreras, and D. Baleanu. *Analysis of Drude model using fractional derivatives without singular kernels*. Open Phys., 15,627-636, 2017.
- [95] F.Y. Alzoubia, M.K. Alqadia, H.M. Al-Khateeba, S.M. Saadeha and N.Y. Ayoubb, *Solution of a Fractional Undamped Forced Oscillator*, Jordan J. of Phys., 5(3), 129-134,2012.
- [96] F. Mainardi. *On some properties of the Mittag-Leffler function  $E_\alpha(-t^\alpha)$ , completely monotone for  $t > 0$ , with  $0 < \alpha < 1$* , Discrete and Continuous Dynamical systems, Series B, 19, 2267-2278, 2014.
- [97] R. Banchuin, *Novel expressions for time domain response of fractance devices*, Cogent Engineering, 4. 1320823, 2017.
- [98] S. HonGuan, H. Xiaoxiao, Z. Yong, D. Baleanu, *Relaxation and diffusion models with non-singular kernels*, Physica, A468, 590-596, 2017.
- [99] J.J. Rosales, J.F. Gómez, M. Guía, and V.I. Tkach. *Fractional electromagnetic waves*, LFNM, International Conference on Laser and Fiber-Optical Networks Modelling, 4-8 Sept. Kharkov, Ukraine, 2011.
- [100] J.J. Rosales, M. Guía, J.F. Gómez, and V.I. Tkach. *Fractional Electromagnetic Waves*. Disc. Nonl. and Compl., 1 (4), 325, 2012.
- [101] M. Guía, F. Gómez, and J. Rosales. *Analysis on the time and frequency domain for the RC electric circuit of fractional order*. Centr. Eur. J. Phys. 11 (10), 1366-1371, 2013.
- [102] H. Ertik, A.E. Calik, H. Sirin, M. Sen, B. Öder. *Investigation of electrical RC circuit within the framework of fractional calculus*. Rev. Mex. Fís., 61, 58-63, 2015.

- [103] A.E. Calik, H. Sirin, H. Ertik, and M. Sen. *Analysis of charge variation in fractional order LC electrical circuit*. Rev. Mex. Fís.,62, 437-441, 2016.
- [104] A. Atangana, B. Saad T Alkahtani. *Extension of the resistance, inductance, capacitance electrical circuit to fractional derivative without singular kernel*. Adv. in Mech. Engineering, 7 (6), 1-6, 2015
- [105] J.F. Gómez-Aguilar, T. Córdova-Fraga, J.E. Escalante-Martínez, C. Calderón-Ramón, R.F. Escobar-Jiménez. *Electrical circuits described by a fractional derivative with a regular kernel*. Rev. Mex. Fís., 62, 144-154, 2016.
- [106] J.F. Gómez, A. Atangana, V.F. Morales. *Electrical circuits RC, LC and RL described by Atangana-Baleanu fractional derivatives*. Int. J. Cir.Theor. Appl., DOI:10.1002/cta.2348, 2017.
- [107] M. Guía, F. Gómez, and J. Rosales. *Analysis on the time and frequency domain for the RC electric circuit of fractional order*. Centr. Eur. J. Phys. **11(10)**, (2013), 1366-1371.
- [108] A. Ebaid, B. Masaedeh, and E. El-Zahar. *A new fractional model for the falling body problem*. Chin. Phys. Lett., 34 (2), 020201, 2017.
- [109] J.F. Gómez-Aguilar, V.F. Morales-Delgado, M.A. Taneco-Hernández, D. Baleanu, R.F. Escobar-Jiménez and M.M. Al Qurashi, *Analytical solutions of the electrical RLC circuit via Liouville-Caputo operators with local and non-local kernels*. Entropy, 2016,**18**, 402.
- [110] J.F. Gómez-Aguilar, R.F. Escobar-Jiménez, M.G. Lopez-Lopez, V.M. Alvarado-Martínez and T. Cordova-Fraga, *Electromagnetic waves in conducting media described by a fractional derivative with non-singular kernel*. Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 30, 1493-1503, 2016.
- [111] A. Alsaedi, J.J. Nieto1, and V. Venktesh. *Fractional electrical circuits*. Ad. in Mech. Eng., 7 (12), 1-7, 2015.

- [112] J. Singh, D. Kumar, M. Al Qurashi and D. Baleanu, *Analysis of a new fractional model for damped Berger's equation*. Open Phys. 15, 35-41, 2017.
- [113] U.N. Katugampola. *A new fractional derivative with classical properties*. arXiv:1410.6535v1, 2014.
- [114] T. Abdeljawad. *On conformable fractional calculus*. Journal of Computational Appl. Math, 279, 57-66, 2015.
- [115] Y. Cenesiz, D. Baleanu, A. Kurt, and O. Tasbozan, *New exact solutions of Burger's type equations with conformable derivative*. Waves in Random and complex Media, 27 (1), 103-116, 2017.
- [116] D. Zhao, and T. Li. *On conformable delta fractional calculus on time scales*. J. Math. Computer Sci, 16, 324-335, 2016.
- [117] M. Al Horani, M. Abu Hammad, and R. Khalil. *Variation of parameters for local fractional non homogeneous linear differential equations*. J. Math. Computer Sci, 16, 147-153, 2016.
- [118] A. Atangana, D. Dumitru, and A. Alsaedi. *New properties of conformable derivative*. Open Math., 13, 889-898, 2015.
- [119] L.F. Shampine, and M.W. Reichlet. *The MATLAB ODE suite*. SIAM J. Sci. Comput., 18, 1-22, 1997.
- [120] L. Martínez, J.J. Rosales, C.A. Carreño, and J.M. Lozano. *Electrical circuits described by fractional conformable derivative*. Int. J. Circ. Theor. Appl., 1-10. DOI: /10.1002/cta.2475, 2018.
- [121] I. Cruz-Aceves, and A. Hernández-Aguirre. *Segmentation of Coronary Angiograms Using a Vesselness Measure and Evolutionary Thresholding: Design of Intelligent Systems Based on Fuzzy Logic, Neural Networks and Nature Inspired Optimization*, 601. Series Studies in Computational Intelligence. 269-289, 2015.



- [122] S. Eiho, and Y. Qian. *Detection of coronary artery tree using morphological operator*. Computers in Cardiology. 24, 525-528, 1997.
- [123] N. Maglaveras, K. Haris, S. Efstratiadis, J. Gourassas, and G. Louridas. *Artery skeleton extraction using topographic and connected component labeling*, Computers in Cardiology. 28, 17-20, 2001.
- [124] M. Bouraoui, C. Ronse, J. Baruthio, N. Passat, and P. Germain. Fully Automatic 3D Segmentation of Coronary Arteries Based on Mathematical Morphology. Proc. 5th IEEE International Symposium on Biomedical Imaging (ISBI 2008): From Nano to Macro, (may 2008),IEEE, 1059-1062, 2008.
- [125] B.D. Lara, A. Faria, A. Araujo, and D. Menotti. A Semi-Automatic Method for Segmentation of the Coronary Artery Tree from Angiography, Proc. XXII Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing (SIBGRAPI 2009), IEEE. (Oct. 2009). 194-201, 2009.
- [126] A. Frangi, W. Niessen, A. Vincken, and M. Viergever. Multiscale Vessel Enhancement Filtering. Proc. Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI 1998). 1496. Springer. 130-137, 1998.
- [127] N.M. Salem, S.A. Salem, and A.K. Nandi. Segmentation of retinal blood vessels based on analysis of the hessian matrix and clustering algorithm. Proc. 15th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2007). Springer Lecture Notes in Computer Science, Springer. 428-432, 2007.
- [128] S. Wang, B. Li, and S. Zhou S. A Segmentation Method of Coronary Angiograms Based on Multiscale Filtering and Region-Growing. Proc. International Conference on Biomedical Engineering and Biotec. (May 2012). 678-681. DOI: 10.1109/iCBEB.2012.39, 2012.
- [129] Y.C. Tsai, H.J. Lee, and M.Y.C. Chen. Adaptive Segmentation of Vessels from Coronary Angiograms Using Multi-Scale Filtering. Proc. International Conference

- on Signal-Image Technology and Internet-Based Systems. Springer. (Jan 2014). 143-147, DOI: 10.1109/SITIS.2013.34, 2014.
- [130] S. Chaudhuri, S. Chatterjee, N. Katz, M. Nelson, and M. Goldbaum. Detection of blood vessels in retinal images using two-dimensional matched filters. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 8, 263-269. DOI: 10.1109/42.34715, 1989.
- [131] T. Chanwimaluang, and G. Fan. An Efficient Blood Vessel Detection Algorithm for Retinal Images Using Local Entropy Thresholding. *Proc. IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS 2003)*. IEEE. 5, (May 2003). 21-24. DOI: 10.1109/ISCAS.2003.1206162, 2003.
- [132] W. Kang, K. Wang, W. Chen, and W.Kang W. Segmentation Method Based on Fusion Algorithm for Coronary Angiograms. *Proc. 2nd International Congress on Image and Signal Processing (CISP 2009)*. (Oct. 2009). 1-4. DOI: 10.1109/CISP.2009.5303615, 2009.
- [133] B. Mathieu, P. Melchior, A. Oustaloup, and Ch. Ceyral. *Fractional differentiation for edge detection*. *Signal Processing*. 83, 2421-2432, 2003.
- [134] P. Amoako-Yirenkiyi, J.K. Appati, and I.K.D. Dontwi. *A new construction of a fractional derivative mask for image edge analysis based on Riemann-Liouville fractional derivative*. *Advances in difference equations*, 238, 1-23, DOI 10.1186/s13662-016-0946-8, 2016.
- [135] Z. Yang, F. Lang, X. Yu, and Y. Zhang. *The construction of fractional gradient operator*. *J. of comp. inf. sys.* 7, 12, 4328-4342, 2011.
- [136] V. Garg, and K. Singh. *An improved Grunwald-Letnikov fractional differential mask for image texture enhancement*. *Int. j. of ad. comp. sc. and app.* 3, 3, 130-135, 2012.
- [137] A. Hamid Jalab, and R.W. Ibrahim. *Texture enhancement for medical images*. *Discrete dynamics in nature and society*. 1-10. DOI: 10.1155/2013/618536, 2013.

- [138] L. Martínez-Jiménez, J.M. Cruz-Duarte, I Cruz-Aceves, and J.J. Rosales. *Enhancement of Vessels in Coronary Angiograms Using a Hessian Matrix Based on Grunwald-Letnikov Fractional derivative*. 2018 8th International Conference on Biomedical Engineering and Technology (ICBET 2018), Bali, Indonesia, April 23-25, Aceptado, 2018.