

UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

División de Ciencias e Ingenierías



**Modelos alternativos de materia oscura y formación
de estructura**

TESIS

que para obtener el grado de
Maestra en Física

presenta

Lic. Stefany Guadalupe Medellín González

Asesor

Dr. Luis Arturo Ureña López

Co-asesor

Dra. Alma Xóchitl González Morales

León, Gto., México Agosto 2018

Disclaimer

Declaro que ésta tesis es un trabajo original y no ha sido presentado con anterioridad a ninguna institución para su evaluación. Así mismo, las fuentes consultadas para la realización de este trabajo se encuentran citadas y se incluyen en la sección de la bibliografía.

Stefany Guadalupe Medellín González

Índice

Índice	I
Índice de figuras	1
1 Introducción	1
2 Modelo cosmológico estándar	6
2.1 Composición del Universo	13
2.2 Materia oscura	18
2.3 Materia oscura como campo escalar	21
2.4 Materia oscura y Formación de estructura	24
3 Teoría de perturbaciones	26
3.1 Perturbaciones lineales para el modelo Λ -CDM	27
3.2 Perturbaciones lineales para el modelo FDM	31
3.3 Teoría de perturbaciones Lagrangiana	33
3.4 Aproximación al régimen no lineal	38
4 Simulaciones cosmológicas	40
4.1 Simulaciones de N -cuerpos	42

4.2	Simulaciones tipo COLA	43
4.3	Algunos parámetros de las simulaciones	44
5	FDM y el código MG-PICOLA	47
5.1	Análisis y resultados	50
6	Conclusiones	65

Capítulo 1

Introducción

El estudio de los objetos celestes ha sido uno de los temas más recurrentes desde el inicio de la humanidad, este fue un eje central en el desarrollo de las civilizaciones antiguas. Este ha evolucionado desde tener connotaciones filosóficas, tratando de explicar los movimientos erráticos de objetos, eclipses y otros eventos astronómicos, hasta llegar a ser una ciencia de precisión que estudia el Universo y su evolución. A lo largo de la historia, la ciencia y tecnología nos han permitido conocer de manera más profunda nuestro Universo. Sin embargo, aún con los grandes avances alcanzados la mayor parte de éste, sigue siendo un misterio.

En la actualidad se sabe que el Universo está conformado de estrellas, que se acumulan debido a los efectos gravitacionales para formar galaxias, que a su vez conforman cúmulos de galaxias y éstos forman supercúmulos, que son objetos más grandes colapsados gravitacionalmente y la estructura formada por estos objetos, conforman lo que hoy se conoce como estructura a gran escala (Large Scale Structure o LSS por sus siglas en inglés), cuya distribución en forma de filamentos

es estadísticamente homogénea e isotrópica a escalas mayores a 100Mpc¹.

El estudio de la formación de estructura cósmica, los fenómenos que se presentan en el Universo y sus propiedades forman parte de la Cosmología. Esta ciencia hace uso de modelos para describir la dinámica del Universo a gran escala, entre los que se encuentra el modelo Λ -CDM (Λ Cold Dark Matter), el cual contempla una componente de materia oscura (CDM, por las siglas en inglés de Cold Dark Matter) y una constante cosmológica (Λ). A dicho modelo también se le llama modelo cosmológico estándar, y describe un universo en expansión estableciendo que, inicialmente toda la materia se encontraba en un estado de muy alta densidad, a partir del cual evolucionó y se expandió para llegar al estado de baja densidad en el que nos encontramos actualmente.

Dicho modelo se basa en dos principios fundamentales: (1) que la Relatividad General, desarrollada por Albert Einstein, es la teoría gravitacional correcta a todas las escalas; (2) el principio cosmológico, que establece que el Universo es homogéneo e isotrópico, es decir, las propiedades físicas del Universo son las mismas en cualquier punto y su estructura se ve igual sin importar la dirección en la que se observe, válido solo a escalas superiores a los 100 Mpc [1].

El mismo establece la composición del Universo y la abundancia de cada componente, constituido por materia bariónica en un 4.9%, materia oscura fría en un 26.6%, energía oscura como constante cosmológica en un 68.5% y una pequeña contribución de radiación.

La materia y energía oscura, son componentes propuestas para dar solución a la discrepancia entre algunas observaciones y la teoría, entre las que se encuentra

¹El pársec (pc) es una unidad de longitud usada en el contexto astronómico, $1\text{pc} = 30857 \times 10^{16}\text{m}$, donde 1Mpc equivale a 10^6pc .

. En particular la materia oscura, es un tipo de materia que no emite ningún tipo de radiación electromagnética y solo interactúa gravitacionalmente.

Con esto, Λ -CDM ha podido reproducir múltiples observaciones de forma exitosa, entre las que se encuentra la estructura a gran escala y la radiación cósmica de fondo de microondas (RCF o CMB por las siglas en inglés de Cosmic Microwave Background) [2].

Por otro lado, los avances tecnológicos han permitido recopilar una gran cantidad de datos de las diferentes observaciones: el CMB [2], las supernovas tipo Ia [3], las oscilaciones bariónicas acústicas (Baryon acoustic oscillations o BAO por sus siglas en inglés) [4,5], han restringido diferentes parámetros cosmológicos con una gran exactitud².

Estas observaciones han logrado convertir a la Cosmología en una ciencia de precisión. La constante disminución en las barras de error de las mediciones, permite examinar la viabilidad de diferentes modelos cosmológicos, haciendo uso de simulaciones numéricas que, de igual forma, deben mantenerse a la par con las observaciones [6].

Un tema de gran relevancia en cosmología es la estructura a gran escala (LSS) y su proceso de formación, ya que nos revela información sobre los estados iniciales y las diferentes componentes del Universo, así como aspectos importantes de su dinámica, por lo que permite observar posibles desviaciones a las predicciones del modelo estándar cosmológico.

Aún con el éxito del modelo estándar cosmológico, existen diferentes propuestas en la literatura que brindan una alternativa, las cuales proponen desde modifi-

²Por ejemplo, la colaboración Planck [2] reporta que la curvatura espacial del universo es plana, con un error de aproximadamente 0.2 %.

caciones a la teoría de la relatividad general (Modify Gravity o MG por sus siglas en inglés) [7, 8], hasta variaciones en los componentes de materia [9] y energía oscura [10, 11]. Estos modelos predicen diferentes valores de algunos observables en comparación con el modelo estándar. Entre las propuestas de materia oscura encuentra la materia oscura como campo escalar (Scalar Field Dark Matter o SFDM por sus siglas en inglés), en la que se centra este trabajo.

Así, las simulaciones numéricas en el contexto cosmológico son de suma importancia, siendo imposible realizar experimentos a escalas astronómicas. Las simulaciones permiten probar diferentes modelos, generando predicciones de observables.

Teniendo en cuenta que la materia oscura es uno de los componentes más importantes en el proceso de formación de estructura, el objetivo de esta tesis es emplear simulaciones rápidas del modelo SFDM. Se analizará la formación de estructura resultante, con lo que se comparará con el modelo Λ -CDM. Para lograrlo se realizan modificaciones al código MG-PICOLA [51].

Enseguida se presenta una descripción del contenido de los capítulos posteriores.

En el capítulo 2, se muestra algunos elementos básicos de la Cosmología, una descripción de modelo estándar cosmológico y una breve reseña de las diferentes etapas del Universo, así como alternativas a la componente de materia oscura propuesta en el modelo estándar. Se hace énfasis en el modelo de materia oscura como campo escalar (SFDM), además de la relación entre la materia oscura y la formación de estructura.

En el capítulo 3, se muestra la teoría de perturbaciones lineal para el caso del modelo Λ -CDM y el modelo SFDM. También se muestra la aproximación no

lineal y su relación con las simulaciones cosmológicas.

En el capítulo 4, se revisan brevemente las ecuaciones y los parámetros usados para las simulaciones, específicamente las del método de N -cuerpos y el método COLA (COmovil Lagrangian Acceleration).

En el capítulo 5, se muestra la implementación del modelo de materia oscura como campo escalar en el código MG-PICOLA y los resultados que se obtuvieron por medio de las simulaciones, donde se hace una comparación con el modelo Λ -CDM y se obtiene su función de correlación.

Finalmente en el capítulo 6, se muestra una serie de conclusiones derivadas del análisis de los resultados obtenidos en el capítulo anterior y del desarrollo de la teoría de perturbaciones para el modelo de campo escalar como materia oscura.

Capítulo 2

Modelo cosmológico estándar

Un modelo cosmológico necesita establecer la forma en la que la materia se encuentra distribuida en el espacio, así como una teoría de gravitación que dicte la forma en la que los objetos interaccionan gravitacionalmente, para describir la dinámica del Universo.

Como se mencionó en la introducción, el modelo Λ -CDM introduce estos requisitos por medio del principio cosmológico y de la relatividad general. Por lo que se presentan algunas de las implicaciones del modelo basadas en las referencias [1, 12].

Si nos encontramos en un universo en expansión, la condición de homogeneidad permite hacer un cambio de coordenadas espaciales a coordenadas llamadas comóviles, estas se definen como:

$$\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x}, \tag{2.1}$$

donde \mathbf{r} es la distancia real entre los objetos, \mathbf{x} se denomina distancia comóvil, t es el tiempo cósmico. El tiempo cósmico es el tiempo medido por un observador

que ve el universo expandirse uniformemente a su alrededor y $a(t)$ es el factor de escala, una función adimensional que describe como las distancias crecen o decrecen en función del tiempo. Por convención se define $a(t_0) = a_0 = 1$ para el tiempo presente (t_0). Derivando la ecuación (2.1) con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{\mathbf{r}} = a\dot{\mathbf{x}} + \dot{a}\mathbf{x}, \quad (2.2)$$

donde el punto representa la derivada con respecto al tiempo, reescribiendo esta ecuación se obtiene

$$\mathbf{v} = \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{r} + a\dot{\mathbf{x}}, \quad (2.3)$$

donde \mathbf{v} es el campo de velocidades con $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ y el término $a\dot{\mathbf{x}}$ es la velocidad peculiar.

Establecer que la densidad de materia es isotrópica, no solo quiere decir, que la densidad es función únicamente del radio, sino también, que no existe una dirección preferencial para otros atributos físicos como el campo de velocidades, por lo que el único campo de velocidades permitido a nivel local, será un campo en expansión o contracción proporcional a la distancia, por lo que la velocidad peculiar en la ecuación (2.3) será cero, obteniendo:

$$\mathbf{v} = \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{r} = H\mathbf{r}. \quad (2.4)$$

donde H es el factor de Hubble definido como $H = \dot{a}/a$.

Este efecto fue observado por primera vez por el astrónomo estadounidense Melvin Slipher, que descubrió una recesión isotrópica en torno a la Tierra. Observada nuevamente por Edwin Hubble, en un estudio sistemático de la relación entre la distancia y la velocidad de 1355 galaxias, dando lugar a lo que se conoce como ley de Hubble ($\mathbf{v} = H_0\mathbf{r}$) [13], así como la constante de Hubble H_0 , que

indica la tasa de expansión actual del Universo y su valor usualmente se expresa como:

$$H_0 = 100h\text{kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}, \quad (2.5)$$

donde el factor h tiene un valor de $h \sim 0.7^1$.

Para describir la geometría del espacio-tiempo, en relatividad general se hace uso de la métrica, la cual proporciona la distancia entre dos puntos en el espacio-tiempo. Al aplicar el principio cosmológico, se exige que la geometría espacial tenga una curvatura constante, esta condición se cumple para tres casos: curvatura positiva, negativa o plana.

La métrica que cumple con las condiciones de homogeneidad e isotropía y considera la dependencia temporal, es la métrica de Robertson-Walker, que en coordenadas esféricas es

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + S_\kappa^2(r)d\Omega^2], \quad (2.6)$$

donde c es la velocidad de la luz y r la coordenada comóvil, mientras que los términos S_κ y $d\Omega$ se definen como

$$S_\kappa = \begin{cases} R \sin(r/R) & \text{para } \kappa > 0 \\ R \sinh(r/R) & \text{para } \kappa < 0 \\ r & \text{para } \kappa = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.8)$$

¹El valor de la constante de Hubble, varía según la combinación de datos que se usen para restringirlo [2].

de forma que la geometría del espacio puede determinarse por dos cantidades, κ llamada constante de curvatura, tomando valores de $\kappa = 0$ para el espacio plano, $\kappa > 0$ para curvatura positiva y $\kappa < 0$ para curvatura negativa, para los casos en los que el espacio es curvo, el factor R representa el radio de curvatura [14].

También se define el tiempo conforme, que permite re-escalar el tiempo cósmico y está dado por

$$dt = a(t)d\tau, \quad (2.9)$$

El tiempo conforme jugará el mismo papel que las coordenadas espaciales en la ecuación (2.6), por lo que la métrica puede reescribirse como

$$ds^2 = a(t) [-c^2 d\tau^2 + dr^2 + S_\kappa^2(r)d\Omega^2]. \quad (2.10)$$

Ya que en un universo en expansión la distancia varia con el tiempo, se define la distancia propia, como la longitud de la geodésica espacial entre dos observadores a un tiempo t fijo, donde la geodésica se define como la mínima longitud que separa a dos puntos sobre una superficie, de tal manera que la métrica se reduce a la forma:

$$ds^2 = a(t)^2 [dr^2 + S_\kappa^2(r)d\Omega^2]. \quad (2.11)$$

Al seguir el camino de la geodésica espacial los ángulos θ y ϕ son constantes, por lo que solo se tendrá una dependencia en la coordenada comóvil como $ds^2 = a(t)^2 dr^2$, donde el valor de $a(t)$ es fijo, definiendo así, la distancia propia dada por la ecuación

$$d_p = a(t) \int_0^r dr, \quad (2.12)$$

así como la distancia de Hubble dada por

$$d_H(t_0) \equiv c/H_0, \quad (2.13)$$

que implica que todos los objetos separados por una distancia propia mayor a la distancia crítica (d_H), tendrá una velocidad de recesión $v_p \geq c$, donde $v_p = \dot{d}_p$. Esta distancia también se usa para establecer una escala a partir de la cual los efectos relativistas se vuelven importantes, por lo que a escalas menores es posible usar la descripción Newtoniana.

Ya que las distancias definidas anteriormente no son directamente observables, es necesario tener una forma de medir distancias a partir de propiedades conocidas, existen diferentes técnicas para inferirlas y dependen de la lejanía a la que se encuentren. Se hace uso del paralaje trigonométrico para objetos relativamente cercanos, tomando generalmente como línea base, la distancia entre el Sol y la Tierra. También se usan las llamadas candelas estándar, objetos cuya luminosidad es prácticamente constante, las supernovas tipo *Ia* se encuentran en esta categoría.

Un concepto de fundamental importancia en Cosmología es el corrimiento al rojo de la luz (redshift z), medido a partir de la variación de la longitud de onda emitida (λ_{em}), con respecto a la longitud de onda observada (λ_{ob}) y cuya relación es

$$z = \frac{\lambda_{ob} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}. \quad (2.14)$$

Dada esta definición, es posible establecer una relación directa entre los objetos observados a partir del redshift y el factor de expansión del Universo por

medio de la siguiente ecuación

$$1 + z = \frac{a_0}{a}, \quad (2.15)$$

para objetos cercanos que se alejan con una velocidad v , el redshift se determina por $z = v/c$.

Por otro lado, al resolver las ecuaciones de Einstein, por medio de la métrica de Robertson-Walker, se modelan las componentes como fluido perfecto, obteniendo las ecuaciones que describen la dinámica del Universo, la primera es la llamada ecuación de Friedmann

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) - \frac{\kappa}{a(t)^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.16)$$

donde G es la constante de gravitación universal, $\rho(t)$ la densidad del Universo, que puede separarse en la densidad de radiación ($\rho_r(t)$) y la densidad de materia ($\rho_m(t)$), Λ la constante cosmológica, introducida inicialmente para obtener un universo estático y el factor de escala $a(t)$.

Al definir una densidad de energía ρ_Λ la constante cosmológica Λ se puede describir como un fluido, cuya ecuación esta dada por:

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (2.17)$$

lo que permite escribir la ecuación de Friedmann de la siguiente forma

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho + \rho_\Lambda) - \frac{\kappa}{a^2}. \quad (2.18)$$

Mientras que la evolución de la densidad se describe a través de la ecuación de fluido,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0, \quad (2.19)$$

donde la presión p es diferente para cada componente del Universo.

Para poder resolver las ecuaciones (2.18) y (2.19) es necesario establecer una tercera ecuación: la ecuación de estado que relaciona la presión y la densidad de energía,

$$p = \omega\rho c^2, \quad (2.20)$$

donde ω es un parámetro que cambia según la componente del Universo. Para las siguientes componentes se tiene que:

$$\omega = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{para radiación.} \\ 0 & \text{para materia sin presión.} \\ -1 & \text{para la constante cosmológica.} \end{cases} \quad (2.21)$$

Es útil representar a la densidad del Universo por medio de una escala natural, con la cual, en lugar de representar la densidad directamente, se expresa el valor relativo a una densidad crítica (ρ_c). La cantidad resultante es adimensional y se conoce como parámetro de densidad Ω_i dado por la ecuación

$$\Omega_i(t) = \frac{\rho_i(t)}{\rho_c}, \quad (2.22)$$

donde el subíndice i representa cada componente del Universo (radiación, materia o constante cosmológica). La densidad crítica ρ_c , se obtiene al suponer un universo plano en la ecuación de Friedmann y esta dada por

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.23)$$

Con las definiciones anteriores, se puede reescribir la ecuación de Friedmann de forma

$$H^2 = H^2\Omega - \frac{\kappa}{a^2}, \quad (2.24)$$

$$\Omega - 1 = \frac{\kappa}{H^2 a^2}, \quad (2.25)$$

definiendo a $\Omega = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda$ y a $\Omega_k = -\kappa/H^2 a^2$ obtenemos la ecuación de Friedmann de forma compacta

$$\Omega + \Omega_k = 1 \quad (2.26)$$

Finalmente, ya que la ecuación de estado es diferente para cada componente del Universo, es necesario establecer la naturaleza de cada una y su abundancia.

2.1 Composición del Universo

Se sabe que el Universo está compuesto por materia bariónica no relativista (materia "normal") y radiación, sin embargo, la teoría permite la inclusión de componentes extras. El modelo cosmológico actual propone que, además de la radiación y materia bariónica, existen dos componentes extras a las cuales se les ha dado el nombre de materia oscura y energía oscura.

Se presenta una breve explicación de cada una de las componentes del modelo cosmológico Λ -CDM, así como algunas de las observaciones que lo apoyan [15].

Radiación .- En Cosmología se define como partículas relativistas, es decir, que se mueven a velocidades cercanas a la velocidad de la luz. Esta velocidad permite que la energía cinética produzca una fuerza de presión cuya

ecuación de estado es $p = \rho/3$. Ya que cualquier partícula que se mueva a estas velocidades tiene la misma ecuación de estado, los neutrinos se encuentran dentro de la clasificación de radiación.

Haciendo uso de la ecuación de estado se obtiene la ecuación de fluido correspondiente a la radiación

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0, \quad (2.27)$$

de donde se deriva la relación

$$\rho \propto 1/a^4 \quad (2.28)$$

que describe como la densidad de energía de la radiación decrece con el factor de escala, mientras que la relación de éste respecto al tiempo, para un universo dominado por radiación es

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}. \quad (2.29)$$

Para establecer la abundancia de radiación en el Universo, se toma en cuenta que solo aproximadamente el 3% de su densidad es producida por las estrellas, por lo que la mayor contribución al parámetro de densidad, es debido a los fotones que se encuentran en el CMB y a los neutrinos provenientes de su análogo, llamado radiación cósmica de neutrinos (CNB, por sus siglas en inglés Cosmic neutrino background), que en conjunto tienen un parámetro de densidad actual de $\Omega_r \simeq 10^{-5}$.

Materia bariónica .- En el contexto cosmológico, se define a la materia bariónica como la materia no relativista que ejerce presión despreciable $p = 0$. Esta

suposición es una buena aproximación para los átomos en el Universo, una vez que se enfriaron y raramente interactúan, así como para los grupos de galaxias en el Universo ya que solo interactúan gravitacionalmente. Con una ecuación de fluido dada por

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0, \quad (2.30)$$

se deriva la relación

$$\rho \propto 1/a^3, \quad (2.31)$$

así como la relación entre el factor de escala y el tiempo, para un universo dominado por materia

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}. \quad (2.32)$$

Finalmente, el parámetro de densidad actual de materia bariónica para el modelo Λ -CDM está dado por $\Omega_b h^2 = 0.0224 \pm 0.0001$, tomando en cuenta el valor del factor de Hubble obtenemos $\Omega_b = 0.049$, constituyendo aproximadamente el 5% de la composición total del Universo.

Energía oscura .- Uno de los más grandes misterios de nuestro Universo es su expansión acelerada. Aún cuando desde 1929 Edwin Hubble demostró que el Universo se expande, al observar la relación entre la distancia y la velocidad de las galaxias [13], no fue hasta 1998 que se mostró que no solo se encuentra en expansión, sino también se acelera [16]. Para explicar este

fenómeno se introdujo el concepto de energía oscura, que es un componente del Universo con presión negativa, proporcionando la fuerza repulsiva causante de la aceleración. Λ -CDM propone que la energía oscura es la constante cosmológica (Λ), definida como la energía del vacío con una ecuación de estado dada por $p = -\rho c^2$ [17, 18], así la ecuación de fluido será

$$\dot{\rho}_\Lambda = 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho_\Lambda + \frac{p_\Lambda}{c^2}\right) = 0, \quad (2.33)$$

de forma que, su densidad de energía permanece constante aún y cuando el Universo se expande. Con una abundancia actual de $\Omega_\Lambda = 0.685 \pm 0.013$, constituyendo aproximadamente el 68% de la composición total del Universo.

Materia oscura .- Componente cuya interacción es puramente gravitacional, fue predicha por primera vez en los años 30, cuando el físico Zwicky observó la distribución de velocidades en el cúmulo Coma y dedujo que la razón masa-luminosidad estaba dada por $M/L \simeq 300h$, esto lo llevó a la conclusión de que existía un tipo de materia no luminosa a la que llamó materia oscura [9, 12]. En el caso del modelo Λ -CDM se propone que la materia oscura es un tipo de materia fría, débilmente interactuante y no colisional, con la ecuación de estado $p = 0$, su relación con el factor de escala es igual que el obtenido para la materia bariónica y su parámetro de densidad actual es de $\Omega_{CDM}h^2 = 0.120 \pm 0.001$, donde $\Omega_{CDM} = 0.264 \pm 0.001$. Posteriormente se hablará de forma más extensa de la materia oscura, constituyendo aproximadamente el 26% de la composición total del Universo.

Ya que la materia oscura y la materia bariónica tienen la misma ecuación de estado, es usual encontrar el parámetro de materia Ω_m como $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{CDM}$, cuyo valor actual es $\Omega_m = 0.315 \pm 0.007$. Los valores actuales de los parámetros de densidad para las diferentes componentes se obtuvieron de la referencia [2].

Con las relaciones encontradas para cada componente, podemos escribir la ecuación de Friedmann como

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{\Omega_k}{a^2} + \Omega_\Lambda, \quad (2.34)$$

donde las cantidades con subíndices 0 representan los valores actuales, para un universo plano $\Omega_k = 0$, por lo que es posible escribir la ecuación anterior como

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2} + \Omega_\Lambda, \quad (2.35)$$

con $\Omega_0 = \Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_\Lambda$.

Se describirá brevemente la historia de la evolución del Universo, de acuerdo con el modelo estándar cosmológico mostrado anteriormente [1, 14, 19].

- **Big Bang** ($t = 0s$).- Evento que inicia la creación del Universo, también conocido como singularidad inicial.

- **Inflación** ($\sim 10^{-35}s$).- Época en la que se cree que un campo escalar ϕ , provoca una expansión acelerada tipo exponencial durante un periodo de tiempo muy corto. Se generan fluctuaciones cuánticas que se cree son las semillas de las perturbaciones, que más adelante formaran la estructura del Universo.

- **Desacoplamiento de Neutrinos** ($t = 0.2s$).- La razón de interacción de los neutrinos es mayor a la razón de expansión, $k_B T \propto 1MeV$ cuando el Universo baja de esta temperatura, los neutrinos dejan de interactuar y se forma la

radiación cósmica de neutrinos (CNB, por sus siglas en inglés Cosmic Neutrino Background).

- **Nucleosíntesis** ($t = 200s$ a $300s$).- Época en la que dominó la radiación. Los protones y neutrones forman los primeros núcleos de helio-3 (${}^3\text{He}$), helio-4 (${}^4\text{He}$), litio (${}^7\text{Li}$) y deuterio(D).

- **Igualdad de materia-radiación** ($t \simeq 10^{11}s$).- Redshift de $z = 3570$. Época en la que el dominio de la radiación en el Universo termina, la densidad de materia y radiación es la misma.

- **Recombinación** $t \simeq 10^{13}$.- Redshift de $z = 1370$. Se refiere a una época en la que los electrones se enlazan con los protones, se forman los primeros átomos neutros de hidrógeno.

- **Desacoplamiento**.- Redshift de $z = 1100$. También llamada época de última dispersión. Se refiere a la época en la que los fotones ya no se dispersan. Cesa la interacción de los fotones con las partículas y se crea la radiación cósmica de fondo (CMB).

- **Universo visible**($t \simeq 10^{16}s$).- Formación de primeras estructuras en el Universo, debido a el colapso gravitacional causado por perturbaciones en el campo de densidad.

- **Universo actual**.- Redshift de $z = 0$. Dominio de la constante cosmológica, el Universo se encuentra en expansión acelerada.

2.2 Materia oscura

La materia oscura es un tipo de materia que solo interactúa gravitacionalmente y no ha sido detectada de forma directa, por lo que se mencionarán algunas de las

observaciones que acreditan su existencia [20].

Curvas de rotación de las galaxias.- En estas observaciones se mapea la velocidad de rotación de las estrellas y el gas, en función a la distancia a la que se encuentran del centro galáctico. Teóricamente, las velocidades tanto de las estrellas como la del gas en los extremos de la galaxia deberían disminuir en función al radio, sin embargo, las curvas de rotación muestran que, las velocidades a las que se mueven son casi constantes, este comportamiento puede ser explicado si un halo de materia oscura se encuentra rodeando la galaxia [21, 22].

Cúmulos de galaxias.- Una de las primeras evidencias de la existencia de la materia oscura obtenida por el físico Zwicky, muestra que existe una menor cantidad de masa en los cúmulos que la necesaria para obtener la dinámica observada [23, 24].

Lentes gravitacionales fuertes.- Este efecto es la distorsión de imágenes de objetos celestes lejanos debido a la masa gravitacional de un cúmulo, suponiendo que solo se tiene materia bariónica, esta distorsión puede ser usada para inferir la forma del pozo de potencial gravitacional del cúmulo y a partir de éste su masa. Sin embargo, la masa inferida a partir de su luminosidad muestra que hay una gran discrepancia entre estas dos mediciones, la cual se atribuye a la presencia de materia oscura [25].

Lentes gravitacionales débiles.- De igual forma que en los lentes gravitacionales fuertes, es un fenómeno que distorsiona la luz debido a la masa gravitacional. En este caso se cuenta con un gran número de fuentes distantes, cuya radiación emitida atraviesa zonas de alta densidad, este efecto solo puede explicarse a partir de la existencia de halos de materia oscura, ya que la distorsión de los objetos es mínima, es necesario realizar el análisis estadístico de un gran

número de galaxias cuya radiación atraviesa dichos halos [26–28].

Finalmente, se tiene evidencia de la distorsión de la radiación proveniente del CMB, generada por halos de materia oscura [29, 30].

Estas son solo algunas observaciones que se inclinan a favor de la existencia de la materia oscura. Sin embargo, a pesar de toda la evidencia observacional, la naturaleza de esta componente sigue siendo un misterio, sin que a la fecha haya podido ser detectada de forma directa por algún experimento terrestre [31, 32].

En la literatura se pueden encontrar diferentes modelos que brindan una alternativa a Λ -CDM, algunos abordan modificaciones a la teoría de la relatividad [33, 34], mientras que otros proponen modificaciones al contenido de materia, ya sea para definir la materia oscura o para definir la energía oscura [35].

Se presentarán algunas propuestas a la materia oscura [20].

- WIMP.- Weakly Interacting Massive Particle (WIMP por sus siglas en inglés), es una partícula ligera, no relativista, que interactúa por medio de la gravedad y la fuerza débil, con una masa de entre algunos GeV y TeV , esta partícula se desacopla del resto de la materia en el Universo temprano [36].

- Axiones.- Introducida como un intento para resolver la violación carga-paridad de la interacción fuerte, es una partícula ligera de aproximadamente $0.01eV$, con una interacción extremadamente débil con otras partículas. Una de las características de ésta es que se encuentra fuera de equilibrio térmico en el Universo temprano [37].

- Neutrinos estériles.- Esta partícula fue propuesta en 1993 por Dodelson y

Widrow, eléctricamente neutra, interactúa más débilmente que los neutrinos convencionales con una masa del orden de KeV y entra en la clasificación de materia oscura tibia [38].

- Materia oscura como campo escalar (SFDM).- Partícula ultraligera, con masa de aproximadamente $10^{-22}eV$, son bosones que se pueden condensar en un solo estado de condensado de Bose-Einstein, que en conjunto se comporta como una onda clásica, propuesta por primera vez en 1994 por S. U. Ji y S. J. Sin [39].

Éste último es el modelo en el que se centra la tesis, por lo que se dará una explicación más amplia.

2.3 Materia oscura como campo escalar

El modelo de materia oscura como campo escalar (SFDM), se encuentra en la literatura con diferentes nombres, como Condensado de Bose Einstein (BEC), Ultra Ligth Axion (ULA) o Wave Dark matter (WDM), este modelo propone que la materia oscura es un campo escalar (ϕ), compuesto por partículas ultra ligeras tipo bosón, con espín 0 y una masa de aproximadamente $m \sim 10^{-22}eV$, que se condensa en un solo estado de condensado de Bose-Einstein comportándose en conjunto como una onda clásica. Fue propuesto como un campo escalar fundamental análogo al inflatón (campo escalar que se cree es el responsable de la expansión acelerada en inflación) dando una alternativa a CDM, [40,41], con una temperatura crítica $T_c = 0.3eV$.

Una de las características principales del modelo, es que presenta un corte natural en el espectro de potencia [42], relacionado con el número de onda de

Jeans (k_J) y se refleja en la supresión de pequeñas estructuras, esta característica ha generado un gran interés en el estudio de formación de estructura, ya que, aún que el modelo presente un comportamiento como materia oscura fría (CDM) a grandes escalas, a pequeñas escalas la presión cuántica suprime la formación en comparación con Λ -CDM y predice una menor abundancia, por lo que sería posible hacer una comparación directa entre estos modelos.

Ya que la partícula es extremadamente ligera, su comportamiento tipo onda se manifiesta a escalas astrofísicas. La ecuación que representa el campo escalar es la ecuación de Klein-Gordon [43,44], que puede ser llevada a un límite no relativista y reducirse a ecuaciones tipo fluido en el caso de interacción gravitacional débil, que permite predecir observables astrofísicos.

La acción que gobierna al campo escalar es

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[\frac{R}{2\kappa^2} + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* + \tilde{m}^2 |\phi|^2 + \tilde{\lambda} |\phi|^4 \right], \quad (2.36)$$

donde $g = \det(g_{\mu\nu})$, R es el escalar de Ricci, G la constante gravitacional Newtoniana, c la velocidad de la luz, ϕ es el campo escalar complejo, $\kappa = 8\pi G/c^4$, $\tilde{m} = mc/\hbar$ y $\tilde{\lambda} = \lambda/(\hbar c)$. Donde m es la masa del bosón, \hbar es la constante reducida de Planck y λ es un parámetro adimensional relacionado con la auto interacción del campo.

Haciendo uso de la métrica Newtoniana

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\Phi(\mathbf{x})}{c^2} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2\Phi(\mathbf{x})}{c^2} \right) \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.37)$$

donde Φ es el potencial gravitacional Newtoniano, se obtiene la ecuación de Klein-Gordon que representa la evolución del campo escalar

$$\left(\square - \tilde{m}^2 - 2\tilde{\lambda} |\phi|^2\right) \phi = 0, \quad (2.38)$$

donde \square es el D'Alambertiano dado por

$$\square = \left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2}\right) \nabla^2 - \left(1 - 2\frac{\Phi}{c^2}\right) \partial_t^2. \quad (2.39)$$

Para tomar el límite no relativista, para un campo débil $|\Phi|/c^2 \ll 1$, se aplica la transformación

$$\phi(t, \mathbf{x}) = e^{i\tilde{m}ct} \psi(t, \mathbf{x}), \quad (2.40)$$

donde el campo ψ se restringe por las condiciones $\partial_t \psi \sim \partial_x^2 \psi = \mathcal{O}(\epsilon^2)$, que indican que la propagación de la energía en el sistema es no relativista ($v \ll c$), con lo que es posible obtener el sistema de ecuaciones

$$i\hbar\partial_t \psi = -\frac{\hbar^2 c}{2\tilde{m}} \nabla^2 \psi + \left(\Phi + \frac{\tilde{\lambda} c^2}{m^2} |\psi|^2\right) m\psi, \quad (2.41)$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{4\pi G \tilde{m}^2}{c^2} |\psi|^2 \left(1 + \frac{\tilde{\lambda}}{2\tilde{m}^2} |\psi|^2\right), \quad (2.42)$$

llamadas ecuaciones Gross-Pitaevskii-Poisson o Schrödinger-Poisson, estas ecuaciones representan la dinámica del campo escalar en una aproximación no relativista [45].

En este trabajo se desarrolla el modelo SFDM sin tomar en cuenta el término de autointeracción, es decir, el término $\tilde{\lambda} = 0$, llamándole en algunos trabajos modelo de Fuzzy Dark Matter (FDM), por lo que en adelante nos referiremos a esté como FDM [46].

2.4 Materia oscura y Formación de estructura

El entendimiento de la formación de estructura se ha convertido en un tema central en la Cosmología, la cual inició a partir de pequeñas perturbaciones el fondo homogéneo de densidad, también llamadas perturbaciones primordiales y cuya prueba principal es la existencia de las anisotropías que presenta el CMB [47]. Una de las principales propuestas, es que las fluctuaciones fueron generadas en el periodo de inflación, al terminar dicho período, estas perturbaciones se grabaron como condiciones iniciales en la época de dominio de la radiación.

A partir de esto, la evolución de las perturbaciones es dominada únicamente por la acción de la gravedad, en donde las regiones con sobredensidad generan pozos de potencial, los cuales atraen una mayor cantidad de masa que como consecuencia genera un crecimiento en la sobre densidad. Este proceso continúa de tal forma que la amplitud de las perturbaciones crece hasta que la inestabilidad gravitacional provoca un colapso y da lugar a la formación de las primeras estructuras. Ya que en la era dominada por radiación, el acoplamiento entre la radiación y la materia bariónica disuelve cualquier fluctuación en el campo de densidad de la materia bariónica, las perturbaciones en el campo de densidad de la materia oscura son las responsables de la formación de estructura, por lo que el análisis de las perturbaciones se realizará en éste campo de densidad.

Una vez que se asumen las condiciones iniciales del Universo, el siguiente paso es el estudio de la formación de estructura como función del tiempo.

Para entender la formación de estructura, es necesario resolver la dinámica de las perturbaciones. Aún cuando el fenómeno de formación se genera a partir de interacciones no lineales, en términos de la inestabilidad gravitacional, las fluctuaciones en la densidad se vuelven suficientemente pequeñas a grandes escalas

para poder usar la teoría de perturbaciones lineal (PT, por sus siglas en inglés Perturbation Theory) sin perder información, sin embargo a escalas menores nos encontraremos en el régimen semilineal y no lineal. En el capítulo siguiente, se mostrará una revisión de la teoría de perturbaciones Lagrangiana a primer y segundo orden, así como algunos temas importantes usados para resolver y entender la formación de estructura [41, 48].

Capítulo 3

Teoría de perturbaciones

Aún cuando la formación de estructura del Universo esta dominada por interacciones no lineales, es posible obtener algunos resultados generales de forma analítica por medio de la teoría de perturbaciones lineal. Iniciando a partir de un fondo con densidad homogénea, se perturban los campos de la siguiente forma

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(t) + \delta\rho(\mathbf{x}, t), \quad (3.1)$$

$$v(\mathbf{x}, t) = v_0(t) + \delta v(\mathbf{x}, t), \quad (3.2)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0(t) + \delta p(\mathbf{x}, t), \quad (3.3)$$

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_0(t) + \delta\Phi(\mathbf{x}, t), \quad (3.4)$$

donde $\rho(\mathbf{x}, t)$ el campo de densidad, $v(\mathbf{x}, t)$ es el campo de velocidades, $p(\mathbf{x}, t)$ es la presión del fluido, $\Phi(\mathbf{x}, t)$ el potencial gravitacional newtoniano, mientras que los términos con δ son las perturbaciones correspondientes a cada campo y los subíndices 0 corresponden a los campos sin perturbar. En adelante se omitirán

las dependencias temporal y espacial de los campos para tener una notación más compacta.

La teoría de perturbaciones lineal es válida siempre que el contraste de densidad δ sea menor a uno y esta definido como:

$$\delta = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 = \frac{\delta\rho}{\rho_0}. \quad (3.5)$$

Tomando estas definiciones, se presentan los resultados obtenidos a partir de la aproximación lineal para el modelo de materia oscura fría (CDM) y el modelo de materia oscura como campo escalar (FDM), en donde se obtienen algunas soluciones analíticas.

3.1 Perturbaciones lineales para el modelo Λ -CDM

La teoría de perturbaciones se basa en tomar un fondo de densidad homogéneo, sobre el cual se realizan pequeñas perturbaciones que implican interacciones entre campos gravitacionales débiles, por lo que es posible hacer una aproximación a un sistema gobernado por ecuaciones de movimiento de un fluido. Este tratamiento perturbativo se muestra en la referencia [12].

Las ecuaciones correspondientes a un fluido perfecto están dadas por

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\Phi, \quad (3.6)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (3.7)$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (3.8)$$

que son la ecuación de Euler, la ecuación de continuidad o energía y la ecuación de Poisson respectivamente, donde $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ es la derivada convectiva y G la constante gravitacional.

Haciendo uso de las ecuaciones de los campos perturbados (3.1), (3.2), (3.3) y (3.4), se obtiene:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}) \cdot \nabla \right) (\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}) = -\frac{\nabla(p_0 + \delta p)}{\rho_0 + \delta\rho} - \nabla(\Phi_0 + \delta\Phi), \quad (3.9)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}) \cdot \nabla \right) (\rho_0 + \delta\rho) = -(\rho_0 + \delta\rho) \nabla \cdot (\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}), \quad (3.10)$$

$$\nabla^2(\Phi_0 + \delta\Phi) = 4\pi G(\rho_0 + \delta\rho). \quad (3.11)$$

Para perturbaciones lo suficientemente pequeñas, los términos de segundo orden son despreciables en comparación con los términos a primer orden, por lo que se obtendrán las ecuaciones lineales.

$$\frac{d}{dt} \delta\mathbf{v} = -\frac{\nabla\delta p}{\rho_0} - \nabla\delta\Phi - (\delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}_0, \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dt} \delta = -\nabla \cdot \delta\mathbf{v}, \quad (3.13)$$

$$\nabla^2 \delta\Phi = 4\pi G\rho_0\delta. \quad (3.14)$$

Usando la ecuación (3.5) del contraste de densidad y haciendo un cambio al sistema comóvil por medio de las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = a(t)\mathbf{r}(t), \quad (3.15)$$

$$\delta\mathbf{v}(t) = a(t)\mathbf{u}(t), \quad (3.16)$$

se obtiene

$$\dot{\mathbf{u}} + 2\frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u} = \frac{\nabla\delta\Phi}{a^2} - \frac{\nabla\delta p}{\rho_0} \quad (3.17)$$

$$\dot{\delta} = -\nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.18)$$

$$\nabla^2\delta\Phi = 4\pi G\rho_0\delta, \quad (3.19)$$

Ahora es necesario introducir la ecuación de estado, que en general se puede escribir en términos de la velocidad del sonido

$$c_s^2 \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}. \quad (3.20)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (3.17), (3.18) y (3.19) se obtiene

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi G\rho_0\delta + c_s^2\nabla^2\delta\rho, \quad (3.21)$$

y aplicándole la transformada de Fourier

$$\delta(\mathbf{x},\mathbf{t}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta_k(t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}d^3k, \quad (3.22)$$

se obtiene la ecuación que gobierna la evolución de las perturbaciones.

$$\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k = \left(4\pi G\rho_0 + \frac{c_s^2 k^2}{a^2}\right)\delta_k, \quad (3.23)$$

y cuya solución general tiene la forma

$$\delta = Ae^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}, \quad (3.24)$$

donde ω se define de la siguiente forma

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G\rho_0. \quad (3.25)$$

Para un universo dominado por materia se tiene que la ecuación de estado es $p = 0$, usándola en la ecuación (3.23) será

$$\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k = 4\pi G\rho_0\delta_k, \quad (3.26)$$

en este caso se propone una solución de la forma $\delta \sim t^n$, al hacer uso de la ecuación (2.32), se obtiene

$$\delta_k(t) = At^{2/3} + Bt^{-1}. \quad (3.27)$$

Por otro lado, al escribir la ecuación (3.26) en términos del tiempo superconforme τ definido por

$$a^2 dt = d\tau, \quad (3.28)$$

se tendrá la siguiente ecuación

$$\frac{d^2\delta}{d\tau^2} - 4\pi G\rho_0 a^4 \delta = 0. \quad (3.29)$$

Esta forma de representar la dinámica de las perturbaciones, permite hacer la comparación con el modelo de campo escalar que se pretende realizar.

3.2 Perturbaciones lineales para el modelo FDM

Para el estudio de la dinámica de las perturbaciones para el modelo FDM se realizará un tratamiento similar al de Λ -CDM, en donde se toman las ecuaciones (2.41) y (2.42), que describen la función de onda en su límite no relativista,

$$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2c}{2\tilde{m}}\nabla^2\psi + \Phi m\psi,$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{4\pi G\tilde{m}^2}{c^2}|\psi|^2.$$

Para seguir la misma línea que el modelo Λ -CDM, se lleva el sistema de ecuaciones a una forma tipo fluido y se aplica la transformación de Madelung $\tilde{m}\psi = c\sqrt{\rho(t, \mathbf{r})}e^{i\mathbf{S}(t, \mathbf{r})/\hbar}$ para la función de onda ψ , comúnmente usada para llevar sistemas cuánticos a una formulación tipo fluido, es decir, permite reescribir las ecuaciones en términos de variables hidrodinámicas [49, 50].

Al usar las definiciones de $\rho = m^2|\psi|^2$ para el campo de densidad y $\mathbf{u} = \nabla\mathbf{S}/m$ para el campo de velocidades, que por definición es irrotacional ($\nabla \times \mathbf{u} = 0$), las ecuaciones (2.41) y (2.42) se pueden escribir como ecuaciones tipo fluido:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0, \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla[\Phi + Q], \quad (3.31)$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (3.32)$$

siendo (3.30) una ecuación tipo Euler, (3.31) la ecuación de continuidad y (3.32) la ecuación de Poisson, se definió el término Q de la forma:

$$Q = -(\hbar^2/2\tilde{m}^2)(\nabla^2\sqrt{\rho})/\sqrt{\rho}, \quad (3.33)$$

denominado potencial cuántico, este término se deriva de la naturaleza ondulatoria de la ecuación de Klein-Gordon.

Al realizar el cambio de coordenadas a coordenadas comóviles y al hacer uso de las ecuaciones (3.15) y (3.16), se tendrán las ecuaciones en el régimen lineal:

$$\dot{\delta} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.34)$$

$$\nabla^2\delta\Phi = 4\pi G\rho_0\delta, \quad (3.35)$$

$$\dot{\mathbf{u}} + 2\frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u} = -\frac{1}{a^2}\nabla \left[-\frac{\hbar^2}{2\tilde{m}a^2} \left(\frac{1}{2}\nabla^2\delta - \frac{1}{4}(\nabla\delta)^2 \right) \right] - \frac{1}{a^2}\nabla^2\delta\Phi. \quad (3.36)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones, se obtiene la ecuación que gobierna la evolución de las perturbaciones de densidad

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = -\frac{\hbar^2}{4\tilde{m}^2a^4}\nabla^2(\nabla^2\delta) + 4\pi G\rho_0\delta. \quad (3.37)$$

Mientras que en términos del tiempo superconforme (ecuación (3.28)) se obtiene,

$$\frac{d^2\delta}{d\tau^2} = -\frac{\hbar^2}{4\tilde{m}^2}\nabla^2(\nabla^2\delta) + 4\pi G\rho_0a^4\delta, \quad (3.38)$$

donde definimos un potencial gravitacional modificado dado por,

$$\nabla^2 \tilde{\Phi} = 4\pi G \rho_0 a^4 \delta - \frac{c^2}{4\tilde{m}^2} \nabla^2 (\nabla^2 \delta). \quad (3.39)$$

La ecuación de la dinámica de las perturbaciones en términos del potencial gravitacional modificado será:

$$\frac{d^2 \delta}{d\tau^2} = \nabla^2 \tilde{\Phi}. \quad (3.40)$$

Para obtener la ecuación que describe la dinámica de las perturbaciones en el espacio de Fourier, se aplica la transformada de Fourier (ecuación (3.22)), con la que se obtiene:

$$\frac{d^2 \delta_k}{d\tau^2} = 4\pi G \rho_0 a^4 \mu(a, k) \delta_k = \kappa \mu \delta_k, \quad (3.41)$$

donde $\kappa = 4\pi G \rho_0 a^4$ y se definió el término $\mu(a, k)$ como

$$\mu(a, k) = 1 - \frac{k^4}{k_j^4} \quad (3.42)$$

y k_j como $k_j^4 = 16\pi G \rho_0 \tilde{m}^2 a^4 / c^2$. También se puede ver que el caso en el que $\mu = 1$ se recupera la ecuación (3.29) correspondiente a Λ -CDM.

Para resolver las ecuaciones anteriores es necesario hacer uso de métodos numéricos, donde el término $\mu(a, k)$ será crucial para el análisis posterior del modelo.

3.3 Teoría de perturbaciones Lagrangiana

El estudio dinámico de un sistema, como las perturbaciones en la densidad del Universo, puede verse desde dos puntos de vista: 1) La teoría de perturbaciones

Euleriana, que estudia la dinámica del campo de densidad y velocidades del sistema; 2) A partir de la teoría de perturbaciones Lagrangiana (LPT, por las siglas en inglés de Lagrangian Perturbation Theory) que estudia las trayectorias individuales de las partículas, a partir del campo de desplazamiento ($\Psi(\mathbf{q})$).

En esta sección se desarrolla la teoría de perturbaciones Lagrangiana a primer y segundo orden (LPT Y 2LPT respectivamente) [48, 51].

La teoría LPT mapea la posición inicial Lagrangiana (\mathbf{q}), a la posición final Euleriana (\mathbf{x}) por medio de la ecuación

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{q} + \Psi(\mathbf{q}, \tau), \quad (3.43)$$

donde la variable dinámica en LPT es el campo de desplazamiento Lagrangiano $\Psi(\mathbf{q}, \tau)$, donde τ es el tiempo conforme dado en la ecuación (2.9). Cuando $\tau = 0$ se tiene que $\Psi(\mathbf{q}, \tau) = 0$ por lo que la posición Lagrangiana y la Euleriana son iguales.

Teniendo que la trayectoria de una partícula en un universo en expansión está dada por

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} + \mathcal{H}(\tau)\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = -\nabla\Phi, \quad (3.44)$$

donde Φ es el potencial gravitacional Newtoniano y \mathcal{H} es el parámetro de Hubble modificado, definido de la siguiente forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{a} \frac{da}{d\tau}. \quad (3.45)$$

Mientras que la ecuación de Poisson está representada por

$$\nabla^2\Phi = \frac{3}{2}\Omega_m\mathcal{H}^2\delta(\mathbf{x}), \quad (3.46)$$

donde $\delta(\mathbf{x})$ es el contraste de densidad definido en la ecuación (3.5). Ya que la densidad en coordenadas Lagrangianas es la misma que la densidad media del Universo, se obtiene la siguiente relación

$$\rho_0 (1 + \delta(\mathbf{x})) d^3x = \rho_0 d^3q. \quad (3.47)$$

Con ésta es posible relacionar la variable de contraste de densidad con el campo de desplazamiento.

$$1 + \delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\det(\delta_{ij} + \Psi)} \equiv \frac{1}{J(\mathbf{q}, \tau)}, \quad (3.48)$$

donde $J(\mathbf{q}, \tau)$ es el Jacobiano de la transformación entre las coordenadas Eule- riana (x) y Lagrangiana (q), mientras que el operador nabla se transforma de la siguiente manera

$$\nabla = (\delta_{ij} + \Psi_{i,j})^{-1} \nabla_{qj}, \quad (3.49)$$

donde $\nabla_q \equiv \partial/\partial q_i$ es el gradiente en las coordenadas Lagrangianas.

Con las definiciones anteriores, es posible escribir la ecuación de movimiento (3.44) en términos del campo de desplazamiento

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \Psi_{i,j} - \Psi_{j,i} \frac{d^2}{d\tau^2} \Psi_{i,j} = -\frac{3}{2} \Omega_m \mathcal{H}^2 \delta, \quad (3.50)$$

donde se tomó la divergencia de la ecuación 3.45 y se substituyó la ecuación (3.46).

Ahora, para resolver perturbativamente el sistema, se realiza una expansión en el campo de desplazamiento

$$\Psi(\mathbf{q}, \tau) = \epsilon \Psi^{(1)}(\mathbf{q}, \tau) + \epsilon^2 \Psi^{(2)}(\mathbf{q}, \tau) + \epsilon^3 \Psi^{(3)}(\mathbf{q}, \tau) + \dots \quad (3.51)$$

De igual forma, se expande el contraste de densidad

$$\delta = \epsilon\delta^{(1)} + \epsilon^2\delta^{(2)} + \epsilon^3\delta^{(3)} + \dots \quad (3.52)$$

Para la solución lineal, se aproxima el Jacobiano a primer orden como

$$J(\mathbf{q}, \tau) \simeq 1 + \Psi_{i,j}(\mathbf{q}, \tau), \quad (3.53)$$

mientras que su inversa será

$$[\delta_{ij} + \Psi_{i,j}(\mathbf{q}, \tau)]^{-1} \simeq 1 - \Psi_{i,j}. \quad (3.54)$$

Haciendo uso de estas aproximaciones y de las ecuaciones (3.48), (3.51) y (3.52), se obtienen las relaciones del campo de desplazamiento y el contraste de densidad. A primer orden se tiene

$$\delta^{(1)} = -\Psi_{i,i}^{(1)}. \quad (3.55)$$

Ya que el campo de desplazamiento es irrotacional, podemos definir $\Psi^{(i)} = \nabla_q \phi^{(i)}$ donde $\phi^{(i)}$ es un campo escalar. Sustituyendo en (3.50) se obtiene la ecuación

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} - \kappa \right) \nabla_q^2 \phi^{(i)} = 0, \quad (3.56)$$

el campo escalar puede separarse en dos funciones $\phi^{(1)}(\mathbf{q}, \tau) = D_1(\tau)\phi^{(1)}(\mathbf{q}, \tau_{ini})$, donde $D_1(\tau)$ es el factor de crecimiento, que solo depende del tiempo. De forma que la ecuación (3.56) satisface

$$\frac{d^2 D_1}{d\tau^2} - \kappa D_1 = 0, \quad (3.57)$$

donde $\kappa = \frac{3}{2}H\Omega_m H_0^2 a = 4\pi G\rho_0 a^4$.

Para el caso de la solución a segundo orden de la teoría de perturbaciones Lagrangiana (2LPT), se realiza una aproximación en el Jacobiano a segundo orden dado por

$$J \simeq 1 + \Psi_{k,k}^{(2)} + \frac{1}{2} \left[\left(\Psi_{k,k}^{(1)} \right)^2 - \Psi_{i,j}^{(1)} \Psi_{j,i}^{(1)} \right]. \quad (3.58)$$

Usando las ecuaciones (3.48) y (3.58), obtenemos la relación entre el contraste de densidad y el campo de desplazamiento a segundo orden

$$\delta^{(2)} = -\Psi_{i,i}^{(2)} + \frac{1}{2} \left(\left(\Psi_{i,i}^{(1)} \right)^2 + \left(\Psi_{i,j}^{(1)} \right)^2 \right). \quad (3.59)$$

De forma que la ecuación de movimiento está dada por

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} - \kappa \right) \nabla_{\mathbf{q}}^2 \phi^{(2)} = -\frac{\kappa}{2} \left[\left(\nabla_{\mathbf{q}}^2 \phi^{(1)} \right)^2 - \left(\nabla_{\mathbf{q}_i} \nabla_{\mathbf{q}_j} \phi^{(1)} \right)^2 \right]. \quad (3.60)$$

Al hacer la separación del campo escalar $\phi^{(2)}(\mathbf{q}, \tau) = D_2(\tau)\phi^{(2)}(\mathbf{q}, \tau_{ini})$ se obtiene la ecuación para el factor de crecimiento a segundo orden

$$\frac{d^2 D_2}{d\tau^2} - \kappa D_2 = -\kappa D_1^2. \quad (3.61)$$

De esta manera, a través del tratamiento LPT y 2LPT, las ecuaciones (3.57) y (3.61) permiten seguir el crecimiento de las perturbaciones de materia, a través de la evolución de los factores de crecimiento D_1 y D_2 .

3.4 Aproximación al régimen no lineal

Como se había mencionado, la estructura que observamos en el Universo es generada por procesos gravitacionales no lineales, para poder hacer una comparación entre las observaciones y los modelos propuestos, es necesario entender los procesos que modifican las leyes del crecimiento lineal.

Existen dos formas de abordar este problema. La primera, es realizar aproximaciones no lineales a las ecuaciones de movimiento, estas permiten que las ecuaciones lineales se extrapolen a un régimen no lineal, en general, éstas toman diferentes suposiciones válidas para el régimen lineal y hacen variaciones a la ecuación de Poisson.

Una de las más populares es la aproximación de Zel'dovich (ZA, por sus siglas en inglés Zel'dovich approximation). Esta aproximación local se vuelve exacta cuando se calcula la dinámica de un colapso unidimensional, que en el marco de referencia Euleriano, hace uso de una relación entre el potencial y el campo de velocidades para variar la ecuación de Poisson. Sin embargo, aún cuando las predicciones obtenidas permiten entender diferentes aspectos del agrupamiento gravitacional, no proporcionan información suficiente para describir la dinámica no lineal cuantitativamente [48].

La segunda opción son las simulaciones numéricas, cuya aproximación es llevar un sistema continuo a un sistema discreto, siguiendo la dinámica de las partículas que interactúan gravitacionalmente. Los fundamentos de los métodos numéricos para resolver la estructura a gran escala vienen de varias décadas atrás, una de las primeras simulaciones de N -cuerpos se realizó en 1975 donde Miyoshi y Kihara tomaron $N = 400$ partículas en un universo en expansión, para entender el comportamiento de la ley de potencia y su evolución temporal. Otros trabajos

como los de Hockney y Eastwood en 1981, discuten varios métodos de simulación numérica como las ventanas de interpolación para asignación de masas.

Los avances tecnológicos han permitido que las simulaciones numéricas aumenten su resolución y han permitido simular estructuras cada vez mas grandes, obteniendo predicciones de diferentes modelos cosmológicos [52]. Más adelante se dará una breve explicación de dos de los métodos usados en la simulación de estructura a gran escala.

Capítulo 4

Simulaciones cosmológicas

Como se estableció anteriormente, éste método es uno de los más usados, que proporciona información acerca de la evolución de la formación de estructura.

Existen diferentes tipos de simulaciones, entre las más comunes se encuentran las simulaciones de N -cuerpos, algunas de estas son Treecode (TC), Partícula-Partícula (PP, por sus siglas en inglés Particle-Particle) y Partícula-Malla (PM, por sus siglas en inglés Particle-Mesh).

Estas describen la distribución de materia por medio de un conjunto de N partículas, que interactúan únicamente por medio de la acción de la gravedad. Sin embargo, para poder tener una buena representación estadística es necesario tener un gran número de partículas, en códigos de N -cuerpos el número de operaciones que se realizan por paso de tiempo está dado por N^2 , lo que representa un gran costo computacional [53].

Una de las simulaciones más grandes realizadas por medio de éste método es la simulación Millennium, que en el 2005 usaron mas de 10 mil millones de partículas en un tamaño de caja de $L_{BOX} = 500h^{-1}\text{Mpc}$, seguida por la si-

simulación Millennium II, la cual simuló $N = 2160^3$ partículas en una caja de $L_{Box} = 100h^{-1}\text{Mpc}$, ambas con el fin de realizar estudios con alta resolución a diferentes escalas, donde la primera se centró en el estudio de la formación de halos que hospedan galaxias de luminosidad $L_* = 0.1$, con un volumen suficiente para obtener buena estadística para objetos como cuásares luminosos o cúmulos masivos de halos. Mientras que la segunda, con 125 veces mayor resolución de masa que su predecesora, logró resolver halos similares a los encontrados en el grupo local, que hospedan enanas esferoidales [54].

Por otro lado, el crecimiento de la base de datos de las observaciones como los obtenidos por Planck [2] y WMAP [55], en donde se estudió el CMB, permitieron restringir fuertemente los parámetros cosmológicos de Λ -CDM.

La nueva generación de sondeos cosmológicos como DES (Dark Energy Survey) [56], eBOSS (Extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey), DESI (Dark Energy Spectroscopic Instrument), etc. proporcionarán mediciones con una precisión del sub nivel porcentual. Con las barras de error reduciéndose tan rápidamente, el gran número de galaxias que podrán ser observadas, permitirán acotar los parámetros libres de diferentes modelos cosmológicos, cuyas predicciones tendrán que tener el mismo nivel de precisión. Aún cuando las simulaciones de N -cuerpos se han desarrollado en gran medida en los últimos años, generar catálogos que estén a la par con las observaciones es un gran reto.

A partir de la generalización del uso de simulaciones numéricas, se han desarrollado diferentes técnicas con el fin de reducir el tiempo y costo de cómputo, logrando llegar a un número de operaciones necesarias del orden de $N \log N$.

La cantidad de simulaciones necesarias para generar catálogos para cada modelo cosmológico es tal, que se vuelve indispensable contar con técnicas que los

generen a un costo computacional menor. Uno de estos métodos es el llamado COLA (COMoving Lagrangian Acceleration), en éste se desacoplan las escalas pequeñas de las escalas grandes, de forma que el tiempo de cómputo disminuye considerablemente en comparación con los códigos de N -cuerpos convencionales.

4.1 Simulaciones de N -cuerpos

Las simulaciones más comunes para el estudio de formación de estructura, son las simulaciones de N -cuerpos. Éstas resuelven la interacción entre partícula-partícula por medio del potencial gravitacional, haciendo uso de las siguientes ecuaciones

$$\partial_t^2 \mathbf{x} = -\nabla\Phi, \quad (4.1)$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho_0 a^4 \delta = \kappa\delta. \quad (4.2)$$

Como se había mencionado, uno de los métodos usados por estas simulaciones es el de PM, el cual aproxima un sistema continuo como el potencial o la densidad, a un sistema discreto en un arreglo sobre una malla, realizando los siguientes pasos en cada iteración.

- Usa un método de interpolación lineal tipo Cloud-in-Cell, que asigna un peso a cada punto de malla representando las partículas.
- Resuelve la ecuación comóvil de Poisson en el espacio de Fourier haciendo uso de la transformada rápida de Fourier.
- A partir de la transformada de Fourier usa el potencial gravitacional, para obtener la fuerza en el espacio real.

- Calcula la aceleración de cada partícula, volviendo a iniciar el proceso de interpolación [57].

4.2 Simulaciones tipo COLA

El método COLA (COMoving Lagrangian Acceleration), es un método híbrido usado para resolver estructura a gran escala (LSS), de forma rápida en un sistema de referencia comóvil, en donde el observador sigue las trayectorias calculadas mediante la teoría de perturbaciones Lagrangiana (LPT).

Esté método proporciona precisión a escalas pequeñas sin sacrificar la precisión a gran escala y permite desacoplar las fuerzas gravitacionales de corto y largo alcance, tanto espacial como temporalmente.

La rapidez de este método es debido a que se calcula de forma exacta la dinámica a gran escala, por medio del primer y segundo orden de la teoría de perturbaciones (LPT y 2LPT) obtenida en la sección 3.3, mientras que las escalas pequeñas, se calculan mediante un código PM como el mostrado en la sección 4.1. Para esto usa la ecuación de movimiento

$$\partial_\tau^2 \mathbf{x} = -\nabla\Phi, \quad (4.3)$$

reescribiéndola como:

$$\partial_\tau^2 \mathbf{x}_{res} = -\nabla\Phi - \partial_t^2 \mathbf{x}_{LPT}, \quad (4.4)$$

donde $\mathbf{x}_{res} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}_{LPT}$, $\mathbf{x}(\mathbf{q}, t)$ es la posición Euleriana de las partículas a un tiempo t , \mathbf{q} es la posición inicial Lagrangiana, \mathbf{x}_{res} es la aproximación a \mathbf{x} y \mathbf{x}_{LPT} es el desplazamiento residual medido desde un marco de referencia comóvil, cuya

trayectoria está dada por \mathbf{x}_{LPT} . De esta forma es posible separar la solución de la dinámica del sistema.

Para escalas grandes ($\geq 100\text{Mpc}/h$ a $z = 0$), se tiene que $\mathbf{x}_{res} \simeq 0$ de tal manera que la ecuación (4.4) se reduce a

$$\nabla\Phi + \partial_t^2\mathbf{x}_{LPT} = 0, \quad (4.5)$$

y solo es necesario resolver la ecuación (3.57) y (3.61) [58].

Sin embargo, a escalas pequeñas el término \mathbf{x}_{res} deja de ser despreciable, por lo que, a estas escalas se hace uso del método de N -cuerpos.

4.3 Algunos parámetros de las simulaciones

En general, si se tiene una simulación donde el campo es periódico, formada por cajas de longitud L , los números de onda están restringidos a condiciones de frontera armónicas, para la coordenada x se tendrá

$$k_x = n\frac{2\pi}{L}, \quad (4.6)$$

donde n está dado por $n = 1, 2, 3, \dots$, de igual manera para las componentes en y y z . Así pues, es necesario tener diferentes parámetros en consideración, por lo que se dará una explicación de algunos de éstos.

- L_{BOX} es el tamaño de la caja, a partir de la cual se generan las barreras periódicas y se elige considerando la región del espectro que se desea analizar.

- N_{tot} es el número total de partículas con las que se genera la simulación, éste parámetro permite controlar la densidad del sistema, donde a mayor densidad se tiene mejor representación estadística de las masas.

Sin embargo, aún cuando un número grande de partículas representa mayor precisión, también representa un costo computacional mayor, debido al aumento en el número de operaciones que se realizan en cada paso de tiempo, así como el almacenamiento en la memoria temporal, el cual escala con el número de partículas.

- N_{mesh} es el número de puntos de malla en los que se divide la caja, éste proporciona la resolución con la que se representa cada partícula.

- k_{min} también llamado modo fundamental, está relacionado con el tamaño de la caja como $k_{min} = 2\pi/L_{box}$, este parámetro nos da el valor mínimo de k que puede ser representado por la simulación.

- $k_{nyquist}$ es el valor máximo de confianza de k que se representa en la simulación (k_{max}), relacionado con el tamaño de la caja y el número de puntos de malla por la ecuación $k_{nyquist} = \pi * N_{mesh}/L_{BOX}$.

- n es el número de pasos temporales que se le da a la simulación, estos pasos se varían dependiendo de la densidad del sistema, ya que en un sistema muy denso el camino libre medio de las partículas es menor, por lo que será necesario un paso de tiempo más pequeño con el fin de calcular de forma correcta las interacciones.

- Shot noise, también llamado Poisson shot noise, es definido en *nbodykit* [59] como $P_{shot} = V/N_{tot}$, donde V es el volumen de la simulación. Representa el error asociado al pasar de un campo continuo a uno discreto y genera una contribución artificial en el espectro de potencia [60].

A partir de estos parámetros, se generan las simulaciones que nos permiten estudiar de manera cuantitativa los diferentes modelos y hacer una comparación entre las observaciones. En este trabajo se hace uso del espectro de potencia $P(k)$, el cual está relacionado con la amplitud de las componentes de Fourier por medio

de la expresión

$$P(k) = \langle |\delta_k|^2 \rangle, \quad (4.7)$$

donde el promedio se toma sobre todas las orientaciones posibles del número de onda \mathbf{k} .

Otra cantidad que considerar es la función de correlación, dada por la ecuación

$$\xi(\mathbf{r}) \equiv \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle, \quad (4.8)$$

o en términos del espectro de potencia

$$\xi(r) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int P(k) \frac{\sin(kr)}{kr} 4\pi k^2 dk, \quad (4.9)$$

que se espera sea igual para el modelo FDM y Λ -CDM a la escala de BAO y está relacionada con la amplitud local relativa de las fluctuaciones, con respecto a la densidad promedio.

Capítulo 5

FDM y el código MG-PICOLA

En nuestro caso, se utilizó el código MG-PICOLA [51], que realiza simulaciones rápidas de formación de estructura, a primer y segundo orden de la teoría de perturbaciones Lagrangiana en el espacio de Fourier, para modelos generales de gravedad modificada (MG) y está basado en el código L-PICOLA [57].

Tomando en cuenta lo presentado en la sección 4.2 para el modelo Λ -CDM, el código MG-PICOLA hace uso del hecho de que algunos modelos de MG pueden parametrizarse por medio de un término (μ) que genera un potencial modificado, donde la forma de μ depende del modelo [8]. En lugar de hacer uso de las ecuaciones 3.15 y 3.16, se realiza una parametrización de segundo orden del potencial gravitacional en el espacio de Fourier, donde $F[f(x)]$ es la transformada de Fourier y está relacionada con el campo de densidades $\delta(k, a) = F[\delta(\mathbf{x}, a)]$ [61].

A primer orden la transformada de Fourier de los modelos con el término μ es igual a la encontrada para el modelo Λ -CDM. Sin embargo, a segundo orden la transformada de Fourier es

$$F_{\mathbf{q}}[\nabla_x^2 \Phi](\mathbf{k}, a) = \kappa \mu(k, a) \delta(\mathbf{k}, a) + a^4 H^2 \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^3} \delta^{(1)}(\mathbf{k}_1, a) \delta^{(1)}(\mathbf{k}_2, a) \gamma_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, a), \quad (5.1)$$

donde γ_2 está dada por

$$\gamma_2 = \gamma_2^E + \frac{3}{2} \Omega_m(a) \left[(\mu(k, a) - \mu(k_1, a)) \frac{k_1}{k_2} + (\mu(k, a) - \mu(k_2, a)) \frac{k_2}{k_1} \right] \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{2k_2^2}. \quad (5.2)$$

En los modelos de MG con dependencia de escala, no es posible separar la parte espacial de la temporal, por lo que en el espacio de Fourier se realiza la separación del tiempo para cada modo k , en donde a primer orden se obtiene

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} - \kappa \mu(k, a) \right) \phi^{(1)}(\mathbf{k}, \tau) = 0. \quad (5.3)$$

Realizando la separación temporal de la forma

$$\phi^{(1)}(\mathbf{k}, \tau) = D_1(k, \tau) \phi^{(1)}(\mathbf{k}, \tau_{ini}), \quad (5.4)$$

se obtiene la ecuación de la evolución del factor de crecimiento

$$\frac{d^2 D_1}{d\tau^2} - \kappa \mu D_1 = 0, \quad (5.5)$$

donde las condiciones iniciales se obtienen tomando a $D_1(\tau_{ini}) = 1$ y la primera derivada como

$$\frac{dD_1}{d\tau} = \left(\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} \right)_{\tau_{ini}}. \quad (5.6)$$

A segundo orden se define el campo como ϕ como

$$\phi^{(2)}(\mathbf{k}, \tau) = D_2(k, \tau) \phi^{(2)}(\mathbf{k}, \tau_{ini}) \quad (5.7)$$

obteniendo la ecuación del factor de crecimiento D_2

$$\frac{d^2 D_2}{d\tau^2} - \kappa\mu D_2 = -\kappa\mu D_1^2 \left(1 + \frac{2a^4 H^2}{\kappa\mu} \gamma_2 \right). \quad (5.8)$$

Si se factoriza el término $\kappa\mu$ se tendrá

$$\frac{d^2 D_2}{d\tau^2} - \kappa\mu D_2 = -D_1^2 (\mu\kappa + 2a^4 H^2 \gamma_2). \quad (5.9)$$

donde μ es el término que caracteriza a cada modelo de MG.

Comparando las ecuaciones 5.5 y 3.41 se aprecia como el modelo de FDM se implementa de forma sencilla en código MG-PICOLA, donde el $\mu(a, k)$ del potencial modificado de FDM y se identifica directamente con el término μ de los modelos generales de MG.

Ya que el código hace uso el término de segundo orden mostrado en la ecuación (5.9), en el modelo FDM el término γ_2^E correspondiente, se obtiene a partir del término completo del potencial cuántico, empleando la expresión

$$Q = -(\hbar^2/2m^2)(\nabla^2\sqrt{\delta+1})/\sqrt{\delta+1}. \quad (5.10)$$

Expandiendo a segundo orden en δ se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \frac{4\tilde{m}^2}{c^2}\nabla^2 Q &= -\nabla^2(\nabla^2\delta) + \left[\frac{1}{4}\nabla^2(\nabla^2\delta^2) \right] + \left[\frac{1}{2}(\nabla^2\delta)^2 \right] + \nabla\delta \cdot \nabla(\nabla^2\delta) \\ &+ \frac{1}{2}\delta\nabla^2(\nabla^2\delta). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Aplicando la transformada de Fourier a cada término y simetrizando se obtiene

$$\gamma_2^E = (1/4)(k_1^2 + k_2^2 + k_1 k_2 \cos(\theta))(k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 k_2 \cos(\theta)), \quad (5.12)$$

donde el $\cos(\theta)$ está dado por la ecuación

$$\cos(\theta) = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 / k_1 k_2. \quad (5.13)$$

De esta forma el modelo FDM puede ser implementado de manera directa al código MG-PICOLA.

5.1 Análisis y resultados

En esta sección se presentan los resultados que se obtuvieron a partir de las simulaciones del modelos FDM y Λ -CDM en el código modificado de MG-PICOLA, para el estudio de la formación de estructura.

Se realizaron pruebas variando diferentes parámetros como la masa del bosón, número de partículas, tamaño de la caja y redshift inicial, manteniendo la densidad total de materia, la densidad de bariónes y el parámetro de Hubble igual a los valores encontrados en la referencia [62], tanto para el modelo FDM como para Λ -CDM.

Para iniciar las simulaciones es necesario proporcionar un espectro de potencia lineal a $z = 0$ con el cual se generan las condiciones iniciales, en nuestro caso los espectros usados fueron proporcionados a partir del código CLASS(Cosmic Linear Anisotropy Solving System) [63, 64].

MG-PICOLA permite obtener el espectro de potencia $P(k)$ directamente, sin embargo, los resultados que se mostrarán fueron analizados a partir de *nbodykit* [59], una paquetería especializada en el análisis de datos de simulaciones cosmológicas.

La figura 5.1 muestra la evolución de los espectros de referencia lineales tanto de Λ -CDM como de FDM, así como para dos masas del bosón (m_a).

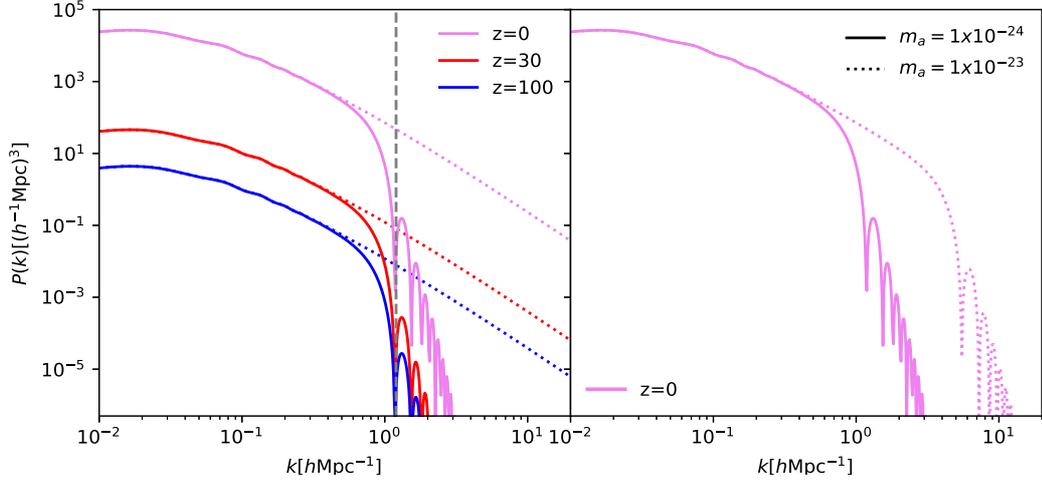


Figura 5.1: A la izquierda se tiene el espectro de potencias lineal de los modelos FDM (línea continua) y Λ -CDM (línea punteada) a redshifts $z = 100$ (línea azul), $z = 30$ (línea roja) y $z = 0$ (línea violeta), la línea gris marca el valor $k \simeq 1.2h\text{Mpc}^{-1}$ correspondiente al corte que presenta el modelo FDM. A la derecha se tiene la comparación del espectro de potencias lineal de FDM para las masas de $m_a = 10^{-24}\text{eV}$ (línea continua) y $m_a = 3 \times 10^{-23}\text{eV}$ (línea punteada).

En la figura de la izquierda se muestra la evolución de los modelos FDM y Λ -CDM cuando solo se toman en cuenta las interacciones lineales, las cuales tienen un efecto de aumento en la amplitud del espectro, manteniendo su estructura inicial, en el caso del modelo FDM con masa $m_a = 10^{-24}\text{eV}$ el corte del espectro de potencias se mantiene en un valor de $k \simeq 1.2h\text{Mpc}^{-1}$ y sus oscilaciones se mantienen centradas en las mismas posiciones. A la derecha podemos observar el efecto que tiene la variación de la masa del bosón sobre el espectro de potencia,

donde masas más ligeras presentan un corte a k menores en comparación con las masas más pesadas. Teniendo en cuenta el efecto de la masa del bosón, las simulaciones se realizaron con masas de $m_a = 10^{-24}\text{eV}$ y $m_a = 3 \times 10^{-23}\text{eV}$, con el objetivo de observar los efectos no lineales en el corte del espectro a escalas mayores.

Es importante mencionar que las simulaciones mostradas fueron realizadas a partir de un espectro lineal que fue cortado para escalas $k > 2.7h\text{Mpc}^{-1}$, con el fin de disminuir el error causado por el shot noise, que se va acumulando a medida que el sistema evoluciona, provocando que las oscilaciones que se encuentran por encima de este valor pueden ser estructura espuria.

En la tabla 5.1 se muestran los parámetros usados para generar las simulaciones en MG-PICOLA de los modelos FDM y Λ -CDM

Simulación	$L_{BOX}[\text{Mpc}]$	N_{tot}	N_{mesh}	$k_{nyquist}$	k_{min}	$m_a[\text{eV}]$	n
Λ -CDM	100	1024^3	1024	32.1	0.062	-	650
Λ -CDM2	”	256^3	256	8.042	”	-	200
FDM1	”	1024^3	1024	32.1	”	3×10^{-23}	650
FDM2	250	”	”	12.868	0.025	10^{-24}	”
FDM3	100	”	”	32.1	0.062	”	”
FDM4	250	256^3	256	3.21	0.0251	”	200
FDM5	500	”	”	1.608	0.012	”	”
FDM6	1000	”	”	0.804	0.0062	”	”
FDM7	10000	”	”	0.0804	0.0006	”	”
FDM8	100	”	”	8.042	0.062	”	”

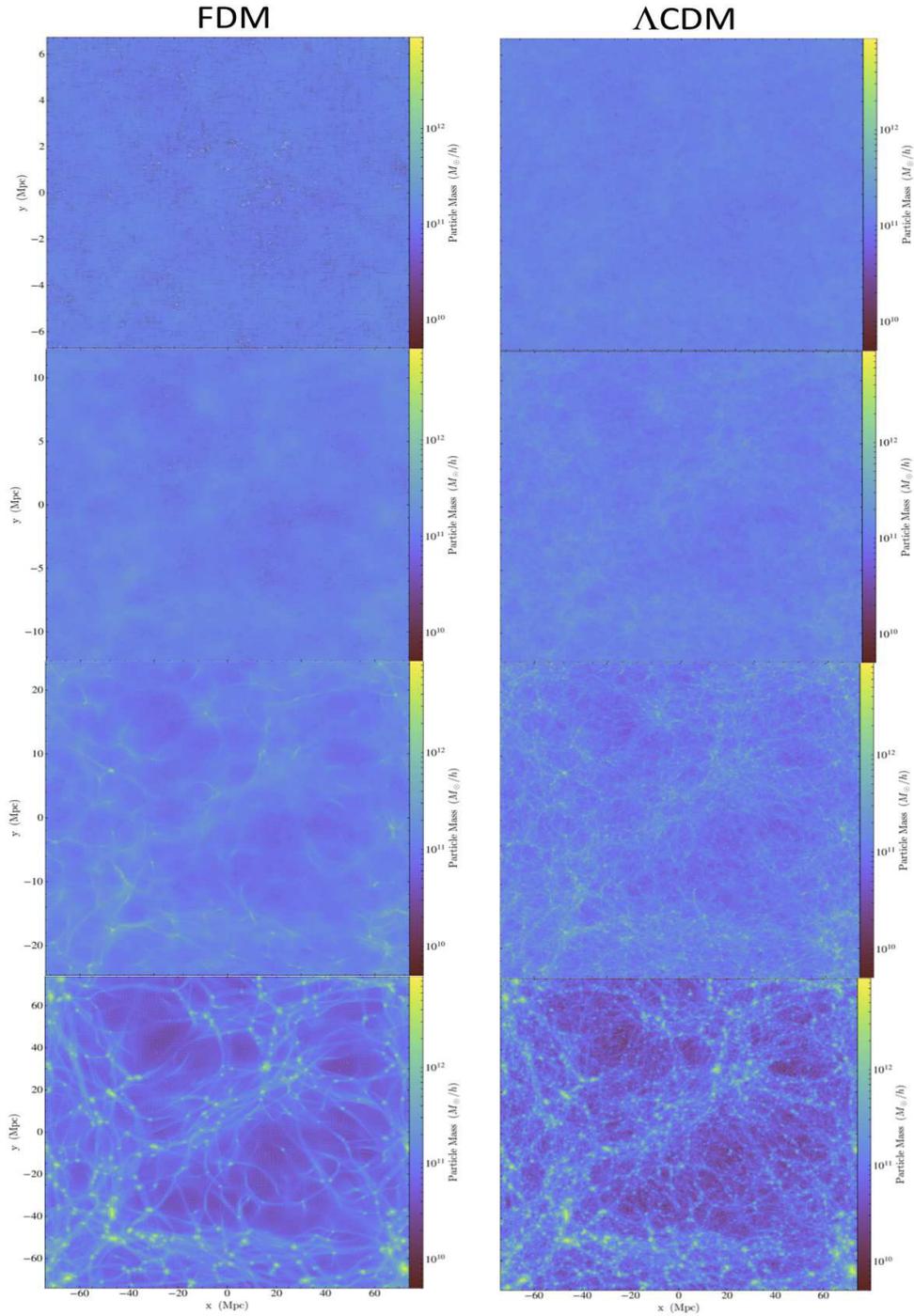


Figura 5.2: Visualización de la evolución de los modelos FDM con masa $m = 10^{-24}eV$ (paneles izquierdos) con los parámetros de FDM8 y Λ -CDM (paneles derechos) con los parámetros de Λ -CDM2. De arriba abajo se tienen redshifts de $z = 10, 5, 2, 0$.

La figura 5.2 es una serie que muestra la evolución de los modelos, donde se visualiza la proyección de las partículas sobre el plano $x-y$, a la izquierda el modelo FDM con masa de $m_a = 10^{-24}\text{eV}$ y a la derecha Λ -CDM, con los parámetros FDM8 y Λ -CDM mostrados en la tabla 5.1. Las filas representan los redshifts $z = 10, 5, 2, 0$,

Se observa como la configuración inicial es prácticamente homogénea en ambos casos, mientras que al ir evolucionando a redshifts menores, comienza a haber un acumulamiento de partículas en algunas zonas, que finalmente dan lugar a la estructura. En los paneles inferiores se aprecia fácilmente como para el caso del modelo FDM la formación de pequeñas estructuras es menor a la mostrada por Λ -CDM.

En la figura 5.3 se muestran los espectros de potencias de FDM, obtenidos usando diferentes tamaños de caja ($L_{BOX} = 1\text{Gpc}, 500\text{Mpc}, 250\text{Mpc}$) y número de partículas, a redshift $z = 0$, en donde se aprecia como varía la resolución de la simulación al realizar estos cambios. Los modos de Fourier más grandes están relacionados con escalas pequeñas, los modos más pequeños se relacionan con escalas más grandes y pueden ser estimados por medio de la relación $k_{min} = 2\pi/L_{BOX}$, mientras que para el modo máximo que puede representarse se hace uso de la $k_{nyquist}$.

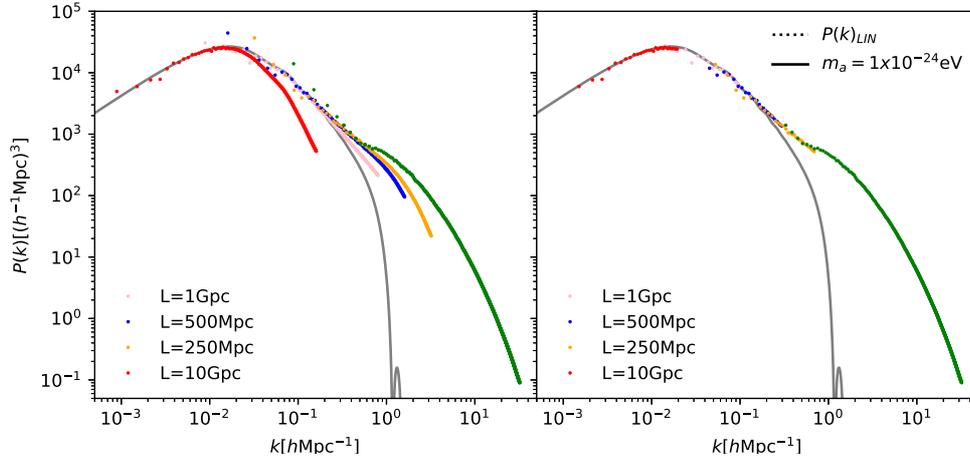


Figura 5.3: En el panel izquierdo se muestran las simulaciones con los parámetros mostrados en la tabla 5.1, en rojo se tiene la simulación FDM7, en rosa FDM6, en azul FDM5, en naranja FDM4 y finalmente en verde FDM3, mientras que la línea sólida gris es el espectro lineal de referencia. En el panel derecho se muestran las mismas simulaciones eliminando las zonas que se encontraban poco representadas por la estadística.

En el panel izquierdo se muestra, en rojo el espectro correspondiente a la simulación FDM7, en rosa la FDM6, en azul la FDM5, en naranja la FDM4 y en verde la FDM3, donde las primeras cuatro tienen un tiempo de simulación promedio de 3 minutos, por lo que es posible generar un gran número de éstas a bajo costo.

Las líneas roja y rosa permiten observar las zonas de interacción lineal, mientras que las líneas azul y naranja comienzan a mostrar un efecto de levantamiento en la zona del corte, cuyo efecto se atribuye a las interacciones no lineales.

Sin embargo, el efecto de tener simulaciones con pocas partículas no solo

provoca que los modos representados sean notablemente menos que en la simulación FDM3, sino también que la precisión del resultado decaiga rápidamente en los modos cercanos al k_{max} . Como consecuencia que para poder estudiar la zona dominada por las interacciones no lineales, es necesario tener un mayor número de partículas.

Como se había mencionado, el número de partículas que pueden ser simuladas depende de la memoria disponible, que en caso del servidor usado para estas simulaciones. se tiene un número máximo de partículas de 1024^3 . Finalmente, la línea verde simulada usando los parámetros FDM3, muestra como un mayor número de partículas tiene mejor representación a escalas grandes, mientras que la caja usada provoca la pérdida de la representación de la región lineal del espectro.

En el panel derecho se muestran las simulaciones con los mismos parámetros que las mostradas en el panel izquierdo, pero eliminando las regiones en las que no se tiene certeza estadística. Esto permite observar el cambio del espectro de potencia al pasar de zonas dominadas por interacciones lineales a las zonas dominadas por las interacciones semilineales y no lineales.

En la figura 5.4, se muestra la comparación de la evolución del sistema simulado con los parámetros FDM2 y los espectros lineales obtenidos por medio de CLASS, iniciando la simulación a un redshift $z = 400$, con redshifts de salida $z = 400, 100, 30$ y 20 .

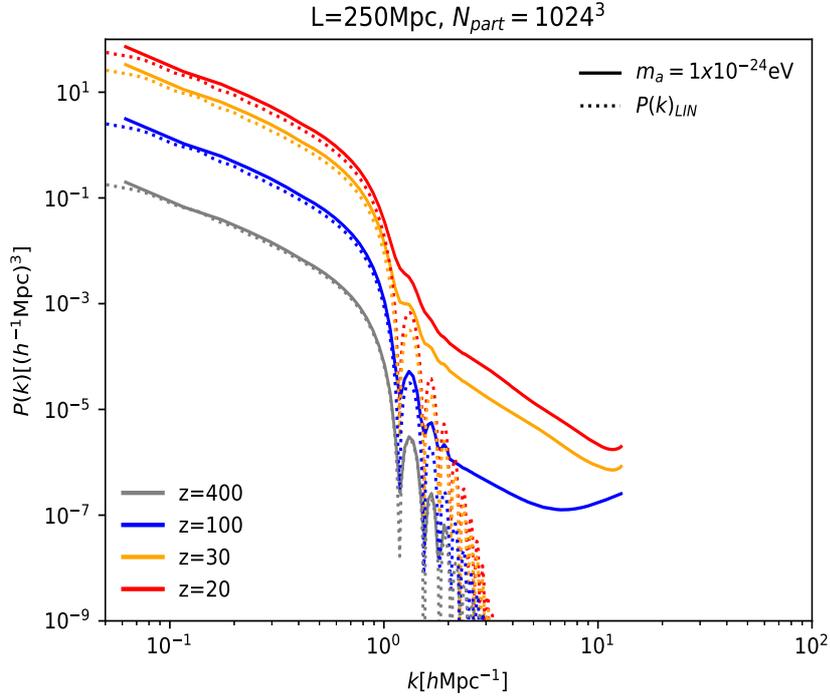


Figura 5.4: *Espectro obtenido iniciando la simulación en $z = 400$, con los parámetros correspondientes a la simulación FDM2 a diferentes redshifts.*

Se observa como la evolución del modelo a redshifts altos ($z = 400, 100, 30$ y 20) captura de manera precisa las oscilaciones del espectro lineal, y a medida que evoluciona las interacciones no lineales se genera un levantamiento en la amplitud a escalas pequeñas.

Estos parámetros fueron elegidos para apreciar como la evolución del modelo a está dominado únicamente por las interacciones lineales, pero, a redshifts menores los efectos no lineales comienzan a ser relevantes.

En la figura 5.5 se muestra la evolución completa del sistema para una si-

mulación con parámetros FDM3, iniciando la simulación a un redshift $z = 30$, tomando como referencia los espectros lineales obtenidos por medio de CLASS (línea punteada).

En el panel superior se muestra la evolución de los redshifts altos ($z = 30, 10, 5$ y 4), en donde se aprecia como las interacciones no lineales van desvaneciendo las oscilaciones que se encuentran en el espectro lineal, al mismo tiempo que el corte natural del espectro de potencia característico se va recorriendo a la derecha.

En el panel inferior se muestra la misma simulación a redshifts menores ($z = 3, 2, 1$ y 0), en donde se puede apreciar cómo, tanto las oscilaciones del espectro como el corte característico se desvanecieron, lo que indicaría que existe una producción considerablemente mayor de estructuras a escalas pequeñas, que la predicha por el espectro lineal.

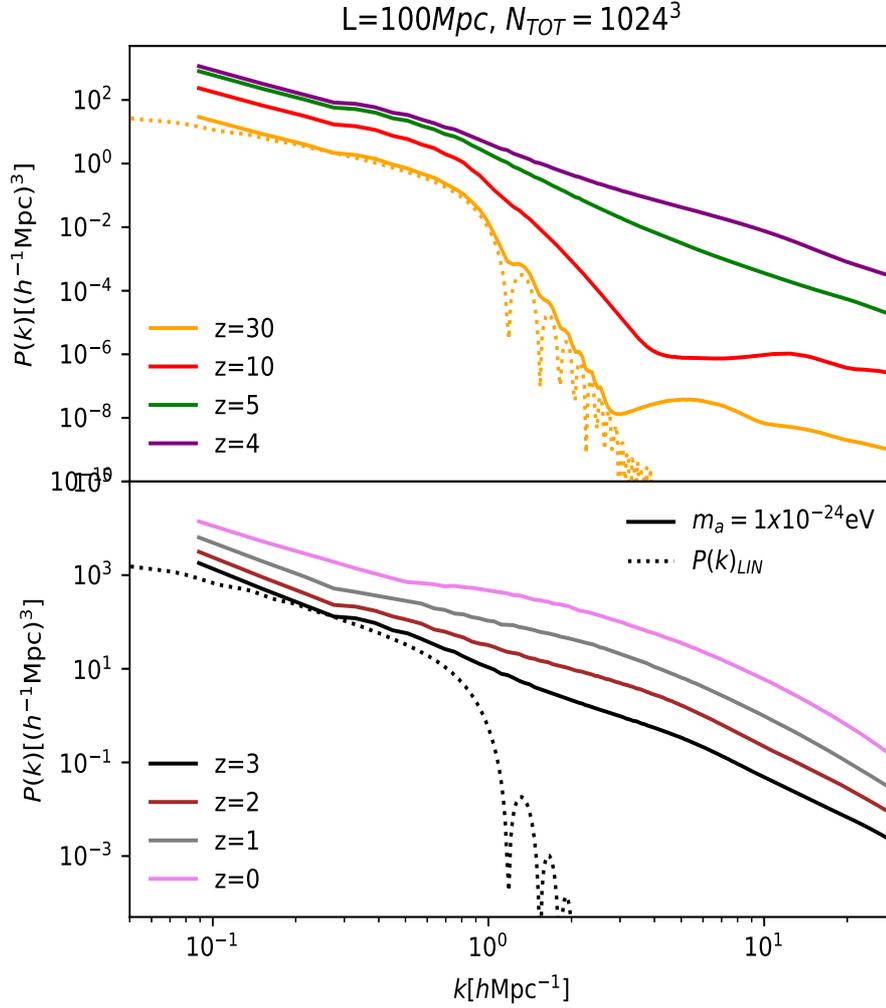


Figura 5.5: Espectro obtenido iniciando la simulación en $z = 30$. Esta simulación se generó a partir de los parámetros FDM3, donde las líneas punteadas pertenecen al espectro lineal de referencia. En el panel superior se encuentra la evolución de los redshifts altos ($z = 30, 10, 5, 4$), mientras que en el inferior se muestra la evolución de los redshifts cercanos ($z = 3, 2, 1, 0$).

Para el modelo Λ -CDM, se encontró que el número de pasos $n = 650$ genera simulaciones de alta resolución, por lo que se usaron para realizar la comparación entre los modelos.

En la figura 5.6 se muestra la comparación entre la simulación Λ -CDM y FDM5. En ambos casos se inició la simulación a un redshift $z = 30$.

En el panel superior se muestran los espectros a redshifts altos ($z = 30, 10, 5$ y 4) donde se aprecia claramente como el modelo FDM se comporta como CDM a gran escala, mientras que a escalas pequeñas genera la supresión de estructura. Sin embargo, como se puede ver en el panel inferior a redshifts pequeños ($z = 3, 2, 1$ y 0), la diferencia entre un modelo y otro a escalas pequeñas disminuye drásticamente, provocado por las interacciones no lineales que cada vez son más relevantes

Aún así, es posible hacer una distinción entre modelos, en donde el modelo FDM para una masa de $m = 10^{-24} \text{eV}$ sigue presentando una supresión de estructuras pequeñas en comparación con lo que se obtiene en Λ -CDM.

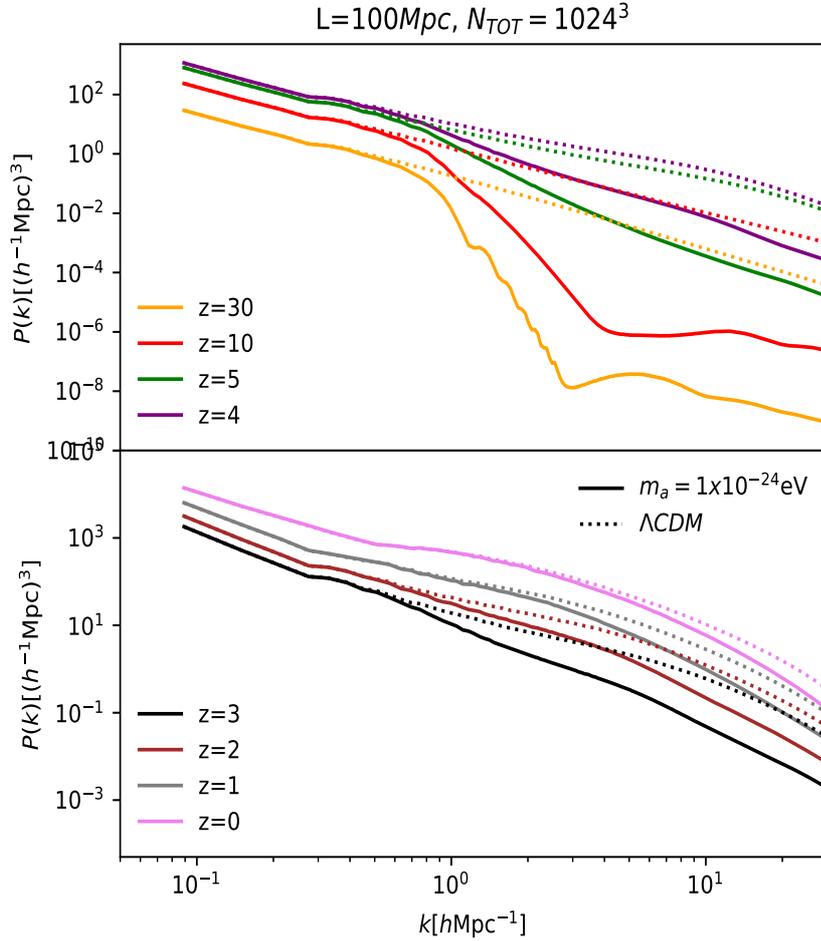


Figura 5.6: Simulaciones iniciadas en $z = 30$, Comparación entre las simulaciones FDM5 (línea sólida) y Λ -CDM (línea punteada) de la tabla 1.

En la figura 5.7 se muestra la comparación entre las simulaciones con parámetros FDM1 y Λ -CDM, mostrando la evolución de los sistemas para redshifts de $z = 30, 20, 10, 5, 4$, con una masa de bosón de $m = 3 \times 10^{-23} \text{eV}$ e iniciando la simu-

lación a un redshift $z = 30$.

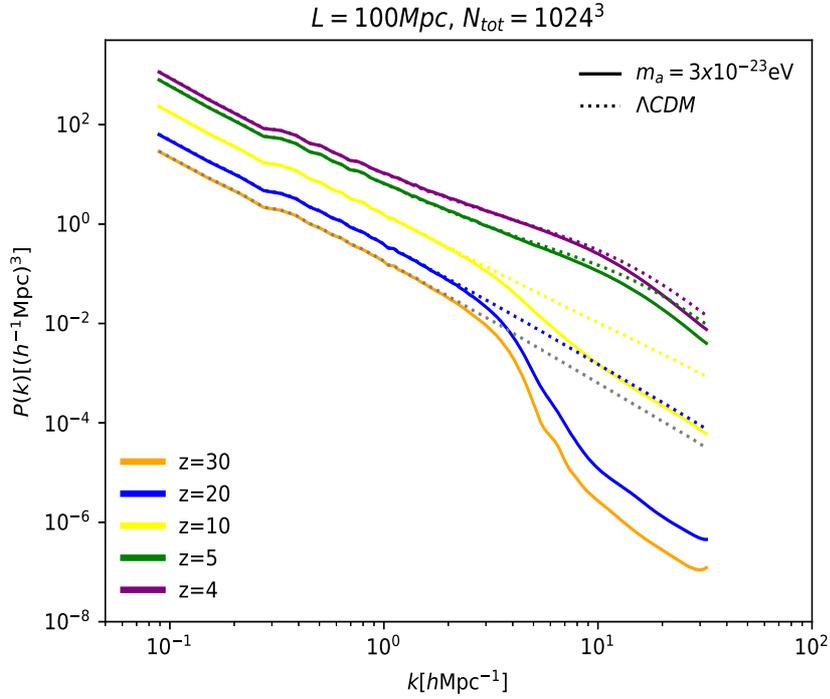


Figura 5.7: Comparación entre las simulaciones FDM (línea sólida) y Λ -CDM (línea punteada) de la tabla 1. Iniciando simulación en $z = 30$.

En este caso nos damos cuenta, cómo al tener un corte en el espectro recorrido a la derecha, la zona de interés de la simulación esta más cercana al modo de Fourier máximo (k_{max}), lo que provoca que la distinción entre modelos sea más complicada. En este caso la diferencia entre el modelo Λ -CDM y FDM incluso a $z = 5$ es mínima, a diferencia del caso mostrado en la figura 5.6 en donde la diferencia es distinguible incluso a redshifts más cercanos.

Con estos resultados encontramos que aún cuando es posible hacer una dis-

tinción entre los modelos, analizar masas más relevantes, como $m_a = 10^{-22}$, para el modelo FDM requieren un mayor número de partículas, esto con el fin de alcanzar la resolución suficiente en los modos k más grandes, en donde aparentemente las masas pesadas tendrían un efecto distinguible en comparación con Λ -CDM.

En la figura 5.8 se muestra la función de correlación que se obtuvo a partir de la simulación con parámetros FDM6 (línea punteada) y la función de correlación lineal (línea continua), obtenida directamente de *nbodykit* [59].

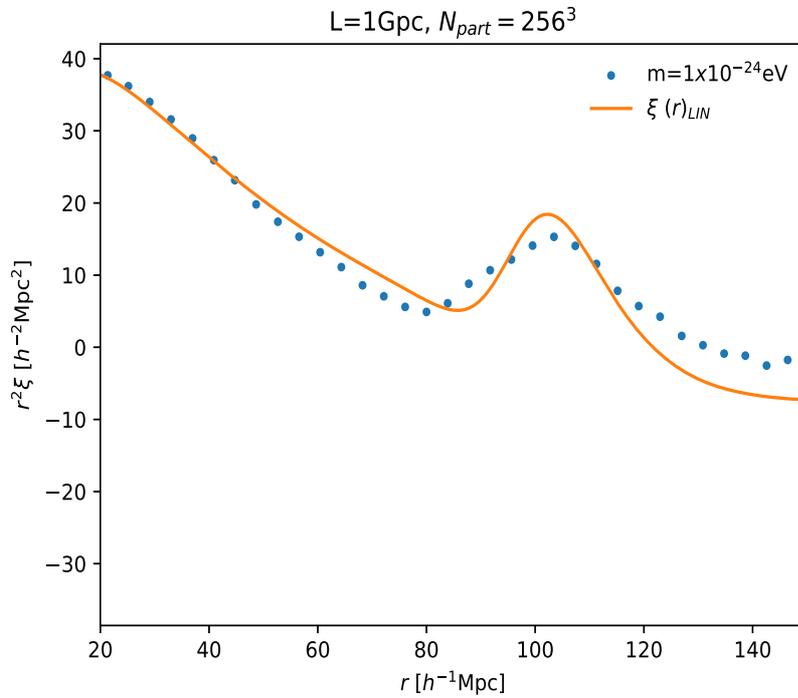


Figura 5.8: Comparación de la función de correlación obtenida usando los parámetros FDM6 de la tabla 5.1 y la función de correlación lineal interna de *nbodykit*.

En esta figura se observa cómo la función de correlación tiene una variación respecto al espectro lineal, conservando la posición del pico de BAO [65], ya que las oscilaciones bariónicas acústicas se encuentran a escalas de aproximadamente 150Mpc las interacciones no lineales presentes solo provocan que el pico de BAO se vea suavizado.

Capítulo 6

Conclusiones

A partir de la revisión del modelo estándar cosmológico y la teoría de formación de estructura, se realizó un tratamiento paralelo para el modelo FDM, obteniendo la ecuación de movimiento de las perturbaciones del campo de densidad (3.2), al aplicar la transformada de Fourier, se consiguió definir el término $\mu(k, a)$ (ecuación (3.42)) y se obtuvo un potencial gravitacional modificado. En la capítulo 5 se identificó éste potencial modificado con el potencial de las teorías MG.

Habiendo identificado el término $\mu(k, a)$ se obtuvo el término de segundo orden γ_2^E (ecuación (5.12)), al tomar el término completo de la potencial cuántico (Q) mostrado en la ecuación (3.33).

Con estos dos términos se realizaron las modificaciones correspondientes al código MG-PICOLA para agregar el modelo FDM, de forma que obtuvimos una herramienta que permite resolver la formación de estructura con interacciones no lineales para este modelo.

El código modificado, se instaló en el servidor remoto de la División de Ciencias e Ingenierías de la Universidad de Guanajuato, en el cual, se realizaron las

simulaciones. El análisis del modelo se centró en los espectros de potencia.

Inicialmente, se realizaron pruebas de convergencia, con las que obtuvimos el número de pasos COLA necesarios para que el modelo Λ -CDM convergiera, como se mencionó en el sección 5.1. Las variaciones en el número de partículas y el tamaño de la caja, nos permitieron establecer regiones de confianza en los resultados obtenidos, donde se encontró que la caja de $L = 100\text{Mpc}$ con 1024^3 partículas, permite apreciar tanto las zonas de interacciones lineales como las no lineales para la masa de bosón de $m_a = 10^{-24}\text{eV}$. Para el caso de la masa del bosón de $m_a = 3 \times 10^{-23}\text{eV}$, estos parámetros generan resultados muy cercanos al modo $k_{nyquist}$ por lo que, es necesario simular un mayor número de partículas para tener los mismos grados de confianza que en el caso anterior.

En los resultados se aprecia la característica del modelo FDM, donde a escalas grandes (k pequeñas) para los dos valores de la masa del bosón no se presenta ninguna variación con respecto al modelo Λ -CDM. A escalas pequeñas (k grandes) la masa de bosón de $m_a = 10^{-24}\text{eV}$, muestra como las interacciones no lineales provocan un levantamiento en la amplitud del espectro de potencia, con respecto a los espectros lineales para Λ -CDM y FDM.

En el caso de FDM el corte del espectro de potencia, se mueve a la derecha a medida que el sistema evoluciona temporalmente, que junto con el aumento de amplitud provoca que el corte se suavice de forma importante, lo que equivale a que haya una menor supresión de estructura comparada con la predicha por el modelo lineal.

Finalmente fue posible hacer una distinción entre el modelo Λ -CDM y FDM incluso en la zona de interacción no lineal.

Como trabajo futuro, se seguirán realizando pruebas y revisiones tanto a la

teoría como a la estructura del código, para generar resultados con un mayor grado de confianza, sistematizar la obtención de resultados y establecer barras de error en los resultados presentados, así como, simulaciones en un servidor más grande para llegar a escalas menores, con el fin de lograr analizar masas relevantes como la masa $m_a = 10^{-22} \text{eV}$.

Bibliografía

- [1] A. Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology*. Wiley Editorial, 2^a edición, 2003.
- [2] Planck Collaboration: N. Aghanim et. al. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. *arXiv:1807.06209*, 2018.
- [3] A. G. Riess et al. New hubble space telescope discoveries of type ia supernovae at $z \geq 1$: Narrowing constraints on the early behavior of dark energy. *The Astrophysical Journal*, 659(1):98, 2007.
- [4] S. Cole et al. The 2df galaxy redshift survey: power-spectrum analysis of the final data set and cosmological implications. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 362(2):505–534, 2005.
- [5] K. Thepsuriya and A. Lewis. Accuracy of cosmological parameters using the baryon acoustic scale. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2015(01):034, 2015.
- [6] P. McDonald and A. Roy. Clustering of dark matter tracers: generalizing bias for the coming era of precision lss. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2009(08):020, 2009.

- [7] J. Gleyzes. Parametrizing modified gravity for cosmological surveys. *Phys. Rev. D*, 96:063516, Sep 2017.
- [8] K. Koyama. Cosmological tests of modified gravity. *Reports on Progress in Physics*, 79(4):046902, 2016.
- [9] G. Bertone and D. Hooper. A history of dark matter. *arXiv:1605.04909*.
- [10] C. van de Bruck, J. Mifsud, and J. Morrice. Testing coupled dark energy models with their cosmological background evolution. *Phys. Rev. D*, 95:043513, Feb 2017.
- [11] S.A. Bonometto, M. Mezzetti, and R. Mainini. Strongly coupled dark energy with warm dark matter vs. lcdm. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(10):011, 2017.
- [12] J. Peacock. *Cosmological Physics*. Cambridge university press, 2003.
- [13] E. Hubble. A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 15(3):168–173, 1929.
- [14] B. Ryden. *Introduction to cosmology*. Pearson Education, 2003.
- [15] A. R. Liddle. 21. the cosmological parameters 21.1. parametrizing the universe. 2003.
- [16] S. Perlmutter, M. S. Turner, and M. White. Constraining dark energy with type ia supernovae and large-scale structure. *Phys. Rev. Lett.*, 83:670–673, Jul 1999.

- [17] P. J. E. Peebles and B. Ratra. The cosmological constant and dark energy. *Rev. Mod. Phys.*, 75:559–606, Apr 2003.
- [18] J. A. Frieman, M. S. Turner, and D. Huterer. Dark energy and the accelerating universe. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 46(1):385–432, 2008.
- [19] G. Ellis. The standard cosmological model: Achievements and issues. *Foundations of Physics*, Jun 2018.
- [20] G. Bertone, D. Hooper, and J. Silk. Particle dark matter: evidence, candidates and constraints. *Physics Reports*, 405(5):279 – 390, 2005.
- [21] The universal rotation curve of spiral galaxies: I. the dark matter connection, author = M. Persic and P. Salucci and F. Stel, journal = arXiv:astro-ph/9506004.
- [22] P. Salucci, A. Lapi, C. Tonini, G. Gentile, I. Yegorova, and U. Klein. The universal rotation curve of spiral galaxies – ii. the dark matter distribution out to the virial radius. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 378(1):41–47, 2007.
- [23] D. E. McLaughlin, J. G. Cohen, and J. P. Blakeslee*. Dynamics of the globular cluster system associated with m49 (ngc 4472): Cluster orbital properties and the distribution of dark matter. *The Astrophysical Journal*, 591(2):850, 2003.
- [24] W. E. Harris, J. P. Blakeslee, and G. L. H. Harris. Galactic dark matter halos and globular cluster populations. iii. extension to extreme environments. *The Astrophysical Journal*, 836(1):67, 2017.

- [25] E. Finney et al. Mass modeling of frontier fields cluster macs j1149.5+2223 using strong and weak lensing. *The Astrophysical Journal*, 859(1):58, 2018.
- [26] D. Clowe, M. Bradac, A. H. Gonzalez, M. Markevitch, S. W. Randall, C. Jones, and D. Zaritsky. A direct empirical proof of the existence of dark matter. *The Astrophysical Journal Letters*, 648(2):L109, 2006.
- [27] M. Mandelbaum. Weak lensing for precision cosmology. *arXiv:1710.03235*.
- [28] M.A. Troxel and Mustapha Ishak. The intrinsic alignment of galaxies and its impact on weak gravitational lensing in an era of precision cosmology. *Physics Reports*, 558:1 – 59, 2015. The intrinsic alignment of galaxies and its impact on weak gravitational lensing in an era of precision cosmology.
- [29] Madhavacheril et al. Evidence of lensing of the cosmic microwave background by dark matter halos. *Phys. Rev. Lett.*, 114:151302, Apr 2015.
- [30] T. Chantavat, U. Sawangwit, P. M. Sutter, and B. D. Wandelt. Cosmological parameter constraints from cmb lensing with cosmic voids. *Phys. Rev. D*, 93:043523, Feb 2016.
- [31] T. M. Undagoitia and L. Rauch. Dark matter direct-detection experiments. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 43(1):013001, 2016.
- [32] P. Cushman, C. Galbiati, D. N. McKinsey, H. Robertson, and T. M. P. Tait. Working group report: Wimp dark matter direct detection. 10 2013.
- [33] A. Joyce, B. Jain, J. Khoury, and M. Trodden. Beyond the cosmological standard model. *Physics Reports*, 568:1 – 98, 2015.

- [34] M. Kunz and D. Sapone. Dark energy versus modified gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 98:121301, Mar 2007.
- [35] N. Roy, A. X. Gonzalez-Morales, and L. A. Ureña López. New general parametrization of quintessence fields and its observational constraints. 03 2018.
- [36] H. Baer, Ki-Young Choi, J. E. Kim, and L. Roszkowski. Dark matter production in the early universe: Beyond the thermal wimp paradigm. *Physics Reports*, 555:1 – 60, 2015. Dark matter production in the early Universe: Beyond the thermal WIMP paradigm.
- [37] P. W. Graham and S. Rajendran. New observables for direct detection of axion dark matter. *Phys. Rev. D*, 88:035023, Aug 2013.
- [38] K. N. Abazajian. Resonantly produced 7 keV sterile neutrino dark matter models and the properties of milky way satellites. *Phys. Rev. Lett.*, 112:161303, Apr 2014.
- [39] S. J. Sin. Late-time phase transition and the galactic halo as a Bose liquid. *Phys. Rev. D*, 50:3650–3654, Sep 1994.
- [40] J. Magaña and T. Matos. A brief review of the scalar field dark matter model. *Journal of Physics: Conference Series*, 378(1):012012, 2012.
- [41] T.-P. Woo and T. Chiueh. High-resolution simulation on structure formation with extremely light bosonic dark matter. *The Astrophysical Journal*, 697(1):850, 2009.

- [42] T. Matos and L. A. Ureña López. A Further analysis of a cosmological model of quintessence and scalar dark matter. *Phys. Rev.*, D63:063506, 2001.
- [43] F.S. Guzmán and L. A. Ureña López. Evolution of the schrödinger-newton system for a self-gravitating scalar field. *Phys. Rev. D*, 69:124033, Jun 2004.
- [44] W. Hu, R. Barkana, and A. Gruzinov. Fuzzy cold dark matter: The wave properties of ultralight particles. *Phys. Rev. Lett.*, 85:1158–1161, Aug 2000.
- [45] L. A. Ureña López. Nonrelativistic approach for cosmological scalar field dark matter. *Phys. Rev. D*, 90:027306, Jul 2014.
- [46] J. W. Lee. Brief history of ultra-light scalar dark matter models. *EPJ Web Conf.*, 168:06005, 2018.
- [47] H. Kurki-Suonio, V. Muhonen, and J. Väliiviita. Correlated primordial perturbations in light of *cmb* and large scale structure data. *Phys. Rev. D*, 71:063005, Mar 2005.
- [48] F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztanaga, and R. Scoccimarro. Large-scale structure of the universe and cosmological perturbation theory. 367, 01 2002.
- [49] R. Carles, R. Danchin, and J. C. Saut. Madelung, gross pitaeviskii and korteweg. *Nonlinearity*, 25:2843, 2012.
- [50] P. H. Chavanis. Bec dark matter, zeldovich approximation, and generalized burgers equation. *Phys. Rev. D*, 84:063518, Sep 2011.
- [51] H. A. Winther, K. Koyama, M. Manera, B.I S. Wright, and Gong-Bo Zhao. Cola with scale-dependent growth: applications to screened modified gravity

- models. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(08):006, 2017.
- [52] K. Nagamine. *Overview: Cosmological Framework and the History of Computational Cosmology*, chapter Chapter 1, pages 1–25.
- [53] T. Padmanabhan. *Structure Formation in the Universe*. Cambridge University Press, 2 edition, 1993.
- [54] M. Boylan-Kolchin, V. Springel, S. D. M. White, A. Jenkins, and G. Lemson. Resolving Cosmic Structure Formation with the Millennium-II Simulation. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 398:1150, 2009.
- [55] G. et al G. Hinshaw. Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results. *Astrophys. J. Suppl.*, 208:19, 2013.
- [56] T. Giannantonio and et al. Dark energy survey year 1 results: Methodology and projections for joint analysis of galaxy clustering, galaxy lensing, and cmb lensing two-point functions. *TBD*.
- [57] C. Howlett, M. Manera, and W.J. Percival. L-picola: A parallel code for fast dark matter simulation. *Astronomy and Computing*, 12:109 – 126, 2015.
- [58] S. Tassev, M. Zaldarriaga, and D. J. Eisenstein. Solving large scale structure in ten easy steps with cola. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2013(06):036, 2013.

- [59] N. Hand, Y. Feng, F. Beutler, Y. Li, C. Modi, U. Seljak, and Z. Slepian. nbodykit: an open-source, massively parallel toolkit for large-scale structure. *arXiv:1712.05834*.
- [60] J. D. Cohn. Power spectrum and correlation function errors: Poisson vs. gaussian shot noise. 11, 04 2005.
- [61] A. Aviles and J. Cervantes-Cota. A lagrangian perturbation theory for modify gravity. 96, 05 2017.
- [62] Planck Collaboration et al. Planck 2015 results - xiii. cosmological parameters. *A&A*, 594:A13, 2016.
- [63] Diego Blas, Julien Lesgourgues, and Thomas Tram. The cosmic linear anisotropy solving system (class). part ii: Approximation schemes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(07):034, 2011.
- [64] L. A. Ureña López and A. X. Gonzalez-Morales. Towards accurate cosmological predictions for rapidly oscillating scalar fields as dark matter. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(07):048, 2016.
- [65] L. Anderson et al. The clustering of galaxies in the sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: baryon acoustic oscillations in the data releases 10 and 11 galaxy samples. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 441(1):24–62, 2014.



Universidad
de Guanajuato

CAMPUS LEÓN
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

23 Agosto de 2018

Dr. Delepine, David Yves Ghislain
Director División de Ciencias e Ingenierías
Universidad de Guanajuato, campus León.

Por este conducto manifiesto que he leído el trabajo de tesis de Stefany Guadalupe Medellín González , titulado “**Modelos alternativos de materia oscura y formación de estructura**”, que presenta para obtener el grado de Maestría en Física que otorga la Universidad de Guanajuato.

Los comentarios que encontré pertinentes ya se los he dado a conocer, así mismo le he recomendado que siga con los trámites para poder realizar su presentación pública de la tesis lo antes posible.

En caso de tener alguna pregunta respecto a la revisión de esta tesis por favor hagámelo saber. Reciba un cordial saludo,

Dra. Alma X. Gonzalez Morales
Cátedra CONACYT
Departamento de Física

UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO



Asunto: Revisión de Tesis
León, Guanajuato, Septiembre de 2018

Dr. David Y. G. Delepine
Director
División de Ciencias e Ingenierías, Campus León
Universidad de Guanajuato
PRESENTE

Estimado Dr. Delepine:

Por medio de la presente le informo que he revisado la tesis "Modelos alternativos de materia oscura y formación de estructura" escrita por la estudiante de la Maestría en Física de la División de Ciencias e Ingenierías, Stefany Guadalupe Medellín Gonzáles. En mi opinión la tesis esta lista para ser presentada y estoy de acuerdo que se proceda al examen recepcional, una vez que se cumplan los procedimientos administrativos correspondientes.

Sin más por el momento, le envío saludos cordiales.

ATENTAMENTE
"LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"

Una firma manuscrita en tinta azul que parece decir "Argelia".

DRA. ARGELIA BERNAL BAUTISTA



Gustavo Niz Quevedo
Departamento de Física
División de Ciencias e Ingenierías

León, Gto., 7 de Septiembre de 2018.

Dr. David Yves Ghislain Delepine
Director de la División de Ciencias e Ingenierías
Universidad de Guanajuato

Estimado Dr. David Yves Ghislain Delepine

Por medio de la presente le informo que he recibido, leído y revisado la tesis de Maestría titulada "Modelos alternativos de materia oscura y formación de estructura" de la alumna Stefany Guadalupe Medellín González, bajo la supervisión de los Drs. Luis Arturo Ureña López y Alma Xóchitl González Morales.

Después de la atención a ciertas correcciones, creo que el trabajo cumple con los estándares requeridos para la obtención del grado, y apoyo la defensa del mismo en la fecha convenida.

Me pongo a su disposición para cualquier duda sobre la revisión de dicho trabajo de tesis.

Atentamente,

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Gustavo Niz'.

Gustavo Niz



Universidad
de Guanajuato

Asunto: Tesis de maestría

León, Gto., México, Agosto de 2018

DR. DAVID Y. G. DELEPINE
DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS
PRESENTE

Estimado Dr. Delepine:

Por este medio me permito informarle que he leído la tesis de maestría “**Modelos alternativos de materia oscura y formación de estructura**”, de la estudiante **Stefany Guadalupe Medellín González**.

La tesis tiene una exposición de los temas que es breve pero informativa, por lo que su lectura se vuelve sencilla y es posible revisarla con mejor detenimiento. Los cálculos mostrados son correctos y los resultados originales se muestran de manera completa y se explican de manera suficiente, explicando con cuidado de que se trata de resultados originales que podrían ser publicados posteriormente.

Por mi parte, no tengo mayores observaciones y por tanto recomiendo que la tesis sea programada para ser defendida en fecha próxima.

Agradeciendo de antemano su atención, aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE
“LA VERDAD OS HARÁ LIBRES”

DR. L. ARTURO UREÑA-LÓPEZ
lurena@fisica.ugto.mx

Departamento de Física, DCI, Campus León, Universidad de Guanajuato

DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS, CAMPUS LEÓN

Loma del Bosque 103, Col. Lomas del Campestre C.P. 37150 León, Gto., C.P. 37150 Tel. +52 (477) 788-5100 Fax:+52 (477) 788-5100 ext. 8410, <http://www.fisica.ugto.mx>

UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO



León, Guanajuato, a 10 de septiembre de 2018

Dr. DAVID YVES GHISLAIN DELEPINE
DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS
P R E S E N T E

Estimado Doctor David Delepine,

Por este medio le informo que he leído y revisado la tesis de maestría de la Licenciada Stefany Guadalupe Medellín González. El trabajo se titula: **“Modelos alternativos de materia oscura y formación de estructura”**, y los asesores son el Dr. Luis Ureña López y la Dra. Alma González Morales.

Le he hecho a la estudiante recomendaciones para el documento final y he observado que la joven posee dominio de su tema de tesis. Me complace informarle que estoy de acuerdo con que se realice la presentación del trabajo de tesis, puesto que el mismo cuenta con todos los requisitos necesarios para la obtención del grado de Maestría en Física.

Reciba mis cordiales saludos,

ATENTAMENTE
“LA VERDAD OS HARÁ LIBRES”

Una firma manuscrita en tinta azul que parece decir 'Nana'.

Dra. Nana Geraldine Cabo Bizet

Departamento de Física
Campus León, Universidad de Guanajuato
Loma del Bosque 103, Colonia Lomas del Pedregal
C.P. 37150, León, Guanajuato,
México