

Estudio comparativo de la solución de mínimos-cuadrados para estimación de estado en sistemas de potencia

¹Miguel Ángel Chávez Cornejo

ma.chavezcornejo@ugto.mx¹

²Ruth García Vallejo

r.garcjavallo@ugto.mx²

³Enrique Arnoldo Zamora Cárdenas

ezamora@ugto.mx³

Resumen

En esta investigación se presenta un estudio comparativo de tres estimadores de estado de sistemas eléctricos de potencia. Los estimadores se formularon como problema lineal de mínimos cuadrados ponderados utilizando mediciones de unidades de medición fasorial (PMUs, por sus siglas en Inglés), las cuales nos permiten obtener mediciones sincronizadas y precisas de fasores de voltaje y corriente en tiempo real. Para el estudio comparativo de los tres estimadores de estado se utilizaron los siguientes tres métodos de solución: a) Método de Ecuaciones Normales sin Restricciones; b) Método de Ecuaciones Normales con Restricciones; y c) Método de la Matriz Aumentada de Hachtel, los cuáles se comparan tanto en precisión como en velocidad cómputo mediante los errores de porcentaje medio absoluto de los valores estimados de magnitud y ángulo de fase, de los voltajes en el sistema de 14 nodos del IEEE y de los tiempos de CPU, respectivamente. Los diferentes métodos de solución de los tres estimadores de estado manejan en diferente forma las mediciones virtuales de inyección de corrientes. Se presentan las deducciones de las tres metodologías de solución de los estimadores lineales, así como las comparaciones de resultados considerando esquemas de medición con y sin error de medición.

Palabras clave: Estimador de estado lineal, PMU, Mínimos cuadrados ponderados.

Introducción

La estimación de estado tiene un papel crucial en el monitoreo de los sistemas eléctricos de potencia, el cual recopila y procesa datos de medición proporcionados por los dispositivos de medición instalados en toda la red eléctrica y obtiene la mejor estimación del estado de operación del sistema, es decir, magnitudes y ángulos de voltaje de todos los buses del sistema. A partir de estas estimaciones, el operador de la red obtiene información sobre el estado operativo real de la red [1], lo cual permite tomar decisiones adecuadas y evitar condiciones operativas erróneas, a menudo basadas en información incorrecta, que se obtienen únicamente a partir de mediciones sin procesar.

Debido a su capacidad para procesar un conjunto de datos redundantes provenientes de diversas fuentes, un estimador de estado puede dar el valor relativo apropiado de cada dato, obteniendo el punto de operación más probable del sistema. Al hacerlo, lo ideal es que los resultados del estimador estén libres de errores. Se espera que el estimador realice de manera confiable la tarea de detectar, identificar y eliminar/sustituir mediciones corruptas [2]. Además, los resultados de un estimador de estado proporcionan la condición inicial para realizar muchos análisis importantes en los sistemas de potencia, por ejemplo, análisis de contingencia, de flujos de potencia, etc. [3].

La mayor parte de los programas de estimación de estados de uso práctico se formulan como sistemas sobredeterminados de ecuaciones no lineales y se resuelven como problemas de mínimos cuadrados ponderados (WLS: weighted least-squares) [4]. Este es un procesador de información que se divide en etapas: estimación de variables de estado y detección e identificación de errores anormales utilizando la redundancia en los datos para su evaluación estadística. La interacción de estas etapas resulta una base de datos suficientemente confiable para llevar a cabo acciones de control [5].

Por otro lado, podemos nombrar a las unidades de medición fasorial (PMUs, por sus siglas en Inglés), en los cuales la tasa de muestreo de este tipo de dispositivos suele ser de 120/60 FPS. Estos innovadores tipos de medidores son capaces de medir sincro-fasores de voltaje y de corriente [6]. Un sincro-fasor es definido como

un fasor calculado a partir de muestras de datos usando una señal de tiempo estándar como referencia para la medición. Con los PMUs se utiliza como señal de referencia el sistema de posicionamiento global (GPS) que tiene un error menor a $1\mu s$ [7].

Dado que las mediciones de voltaje y corriente son funciones lineales del estado del sistema, cuando se tienen únicamente mediciones PMU el problema de estimación se convierte en un problema lineal de mínimos cuadrados ponderados que no requiere de un proceso iterativo. Se obtiene una estimación de un sistema dinámico en un instante de tiempo correspondiente al instante de medición, lo que nos da como resultado un estimador de estado caracterizado por una alta frecuencia de actualización y baja latencia, el cual se denomina estimador de estado en tiempo real [8].

En este proyecto de investigación se muestran los resultados de 3 estimadores de estado de sistemas de potencia, los cuales se formulan como un problema lineal de mínimos cuadrados ponderados, debido a que únicamente utilizan mediciones PMU, por tanto, tenemos un sistema lineal cuyo método de solución solamente requiere una sola solución cerrada para cada instante de muestreo en el tiempo.

Dicho estimadores se han implementado mediante códigos digitales generales desarrollados en MATLAB para sistemas de n nodos capaces de estimar a la perfección cualquier red eléctrica sin importar el tamaño. Para la solución de los estimadores implementados tres métodos diferentes de solución.

Los 3 métodos que se implementaron son:

1. **Ecuaciones Normales sin restricciones**, para este método, las restricciones se manejarán como mediciones (virtuales) muy precisas con ponderaciones altas y estas se utilizan para determinar valores de las variables de estado desconocidas a partir de las mediciones disponibles en el sistema, además consiste en formular un sistema de ecuaciones lineales que representan las mediciones y las incógnitas a estimar y resolver este sistema usando la técnica de mínimos cuadrados.
2. **Ecuaciones Normales con Restricciones**, es una variante del método de ecuaciones normales que incorpora restricciones adicionales en la formulación del sistema de ecuaciones, estas restricciones se deben a límites físicos en las variables de estado o a restricciones impuestas por la estructura del sistema de potencia y aunque este método puede mejorar la precisión de las estimaciones, también puede aumentar la complejidad y la probabilidad de errores en la formulación de las restricciones.
3. **Método de la Matriz aumentada de Hachtel**, es un método más reciente que ha demostrado ser eficiente en la estimación de estado en los sistemas de potencia y puede converger a una solución precisa incluso en situaciones de mediciones escasas o ruidosas, en este método se escriben las mediciones regulares como restricciones de igualdad si los residuos asociados se retienen como variables explícitas.

Para probar y analizar los estimadores implementados se utilizó como sistema de prueba el sistema de 14 nodos del IEEE. Las mediciones de la red fueron otorgadas por el estudio de flujos de cargas. Los resultados del estudio de flujos son utilizados como referencia para comprobar la validez de los resultados de los estimadores implementados. Para su análisis se realizaron dos casos de estudio, el primero consiste en validar los resultados de los estimadores utilizando un conjunto de mediciones sin error. Para el segundo caso se utilizó un conjunto de mediciones conteniendo error aleatorio para determinar la efectividad de los estimadores para filtrar el error de medición.

Modelo matemático

En esta sección se muestra la formulación del modelo matemático de un estimador de estado de sistemas de potencia considerando el modelo de medición lineal que se muestra en (1),

$$z = Hx + r \quad (1)$$

donde

x = vector de estados del sistema (fasores de voltaje)

z = vector de mediciones físicas y virtuales

r = vector de ruido de medición

donde H es un vector de funciones lineales de dimensión m que relaciona matemáticamente las variables de estado con las mediciones. Cuando el error de medición mostrado en (1) se minimiza mediante el método de mínimos cuadrados ponderados (WLS), la función objetivo se formula como se muestra en (2),

$$J = [z - Hx]^T R^{-1} [z - Hx], \quad (2)$$

donde R es la matriz de covarianza del vector de error de medición, r . Las "mediciones" de inyección de corrientes en nodos sin carga ni generación se manejan como restricciones basadas en la Ley de Corrientes de Kirchhoff, como sigue,

$$Cx = 0, \quad (3)$$

las cuales se denominan mediciones virtuales, donde C es un vector de funciones virtuales de dimensión s . Trataremos a (3) como restricciones en el proceso de minimización de (2), debido a que se consideran mediciones perfectas, las cuales teóricamente se deben cumplir.

Minimizando la expresión (2) multiplicada por $1/2$ sujeta a el conjunto de restricciones (3) y asignando un vector λ de multiplicadores de Lagrange obtenemos el siguiente Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2} [z - Hx]^T R^{-1} [z - Hx] + \lambda^T Cx. \quad (4)$$

Como mínimo buscamos $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, lo que da:

$$HR^{-1} [z - Hx] - C^T \lambda = 0, \quad (5)$$

donde (5) constituye un conjunto de n ecuaciones de medición que deben resolverse junto con el conjunto de s ecuaciones de restricción (3). Por tanto, x al igual que λ están determinados, pero en nuestro caso x es el de mayor interés debido a que representa el vector de estados estimado de todo el sistema de potencia.

Métodos de solución

1. Ecuaciones normales con restricciones

Debido a que se quiere manejar las restricciones de manera explícita (5) y (3) se pueden reescribir en forma matricial como se muestra en (6).

$$\begin{bmatrix} H^T R^{-1} H & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^T R^{-1} z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

donde la solución de dicho sistema lineal proporciona el vector de estados estimado por el estimador de estado lineal basado en el método de ecuaciones normales con restricciones.

2. Ecuaciones normales sin restricciones

Si el conjunto de restricciones está vacío, (5) se reduce a:

$$\begin{bmatrix} H^T R^{-1} H \end{bmatrix} x = H^T R^{-1} z, \quad (7)$$

$[H^T R^{-1} H]$ es simétrica y su rango $H = n$. Para este método, las restricciones se manejarán como mediciones (virtuales) muy precisas, con ponderaciones altas.

3. Matriz aumentada de Hachtel

En este método, tratamos el vector residual r como una incógnita. Dejamos:

$$r = z - Hx \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & C \\ 0 & \alpha I & H \\ C^T & H^T R^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha \lambda \\ -\alpha r \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde α es un parámetro escalar para elegir.

Para x y λ es matemáticamente, pero no numéricamente, equivalente al método 1 anterior. De las incógnitas, sólo se necesita x . Una gran ventaja del método de Hachtel es que se evita el cálculo de $H^T R^{-1} H$.

Como ocurre con (6), el sistema (9) también tiene una matriz de coeficientes no definida. Matemáticamente, α en (9) se cancela, pero su tamaño influirá en el condicionamiento del conjunto de ecuaciones lineales (9). Utilizar $\alpha = 1$ da buenos resultados numéricos.

Resultados de simulación sin error de medición

El código digital general lee el archivo de datos de la red que se desea analizar, en el cual se definen las impedancias primitivas de las líneas y transformadores que conforman la red eléctrica, así como las mediciones de los PMUs. Después, los códigos desarrollados calculan las admitancias de sistema de las líneas, transformadores y las matrices de índices de medición (mediciones de voltaje e inyección de corrientes, de flujo de corrientes de línea y de flujo de corrientes en transformadores). Una vez calculado lo anterior el estimador dimensiona y genera los vectores y matrices requeridos para solucionar el sistema lineal de la solución de las ecuaciones.

Para el método 1, el programa imprime un resumen de los componentes que conforman todo el sistema analizado y de las mediciones utilizadas por dicho análisis. Finalmente, proporciona el vector de estados estimados en coordenadas polares junto con los valores de los multiplicadores de Lagrange, así como los errores de porcentaje medio absolutos y los tiempos de cpu.

En el método 2 no se toman en cuenta las restricciones, por lo que ya no veremos los multiplicadores de Lagrange en el vector de la solución, simplemente los voltajes en su forma fasorial, los errores de porcentaje medio absolutos y los tiempos de cpu.

Por último, el código empleado con el método 3 si muestra en la solución los multiplicadores de Lagrange, mismos que ya se explicó no son exactamente iguales a los del método 1, además de los voltajes estimados y un vector de residuos.

- Red de 14 nodos del IEEE

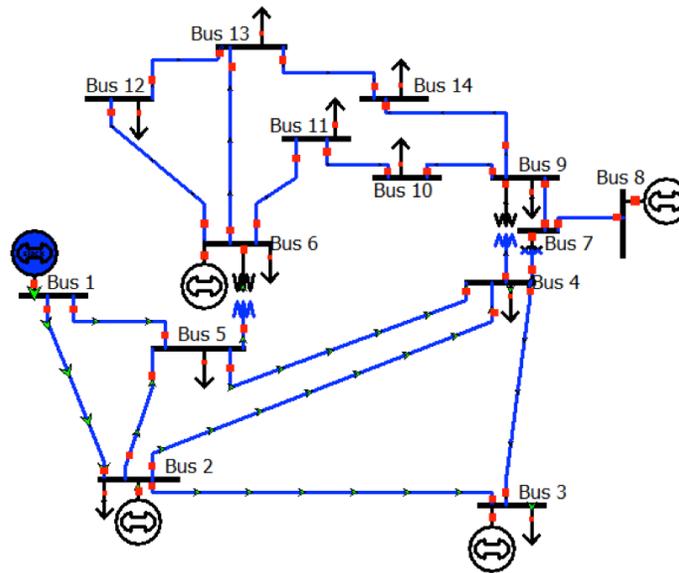


Figura 1. Sistema de 14 nodos del IEEE.

Para la validación de este proyecto de investigación se presentan los resultados de la estimación de estado del sistema de 14 nodos del IEEE que se muestra en la Figura 1. La red eléctrica de este sistema consta de 14 nodos, 15 líneas transmisión y 5 transformadores de potencia. Para este sistema se utilizaron 3 medidores PMU ubicados en los nodos 2, 6 y 9. Estos medidores proporcionan 30 mediciones PMU de las cuales 6 son mediciones de la parte real e imaginaria de voltaje, 18 son mediciones de flujo de corriente en líneas de transmisión y 6 son mediciones de flujo de corriente en transformadores. Además, se consideraron 2 mediciones virtuales las cuales consisten en las inyecciones de corriente real e imaginaria del nodo de inyección cero, 7. En total se tiene un archivo de datos de medición con 32 mediciones.

Las mediciones PMU de los fasores de voltaje y fasores de corriente en líneas y transformadores son las que se muestran en la Tabla 1, mientras que las mediciones virtuales de inyección de corriente se basan en la ley de corrientes de Kirchoff en el nodo 7 y se representan como se muestra en (16).

Tabla 1. Conjunto de mediciones PMU.

| PMU en bus 2 | PMU en bus 6 | PMU en bus 9 |
|-----------------------------------|--|--|
| $V_2 = 0.985075 - 0.098964i$ | $V_6 = 0.974790 - 0.284799i$ | $V_9 = 0.935861 - 0.281859i$ |
| $I_{2-1} = -1.582497 - 0.240921i$ | $I_{6-11} = 0.054848 - 0.100275i$ | $I_{9-10} = 0.044514 - 0.011054i$ |
| $I_{2-3} = 0.748950 - 0.048268i$ | $I_{6-12} = 0.067470 - 0.051598i$ | $I_{9-14} = 0.083176 - 0.033480i$ |
| $I_{2-4} = 0.563223 - 0.044569i$ | $I_{6-13} = 0.146353 - 0.142042i$ | $I_{9-4}^{Tr} = -0.146281 + 0.064010i$ |
| $I_{2-5} = 0.416580 - 0.059588i$ | $I_{6-5}^{Tr} = -0.420097 + 0.168889i$ | $I_{9-7}^{Tr} = -0.221434 + 0.230190i$ |

$$C_1 = I_{7,r} + I_{7,i} \quad (16)$$

Los sistemas lineales para los 3 casos quedan representados de la siguiente forma:

$$1. \quad \begin{bmatrix} [H^T R^{-1} H]_{28 \times 28} & C_{28 \times 2}^T \\ C_{28 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{28 \times 1} \\ \lambda_{2 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [H^T R^{-1} z]_{28 \times 1} \\ 0_{2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$2. \quad [H^T R^{-1} H]_{28 \times 28} [x]_{28 \times 1} = [H^T R^{-1} z]_{28 \times 1} \quad (18)$$

$$3. \quad \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 30} & C_{2 \times 28} \\ 0_{30 \times 2} & \alpha I_{30 \times 30} & H_{30 \times 28} \\ C_{28 \times 2}^T & [H^T R^{-1}]_{28 \times 30} & 0_{28 \times 28} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha \lambda_{2 \times 1} \\ -\alpha r_{30 \times 1} \\ x_{28 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ z_{30 \times 1} \\ 0_{28 \times 1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

donde los subíndices de los arreglos matriciales indican las dimensiones de cada arreglo para cada método de solución. Las soluciones de (17)-(19) proporcionan el vector de estados estimados x cuyos valores son las partes real e imaginaria de los fasores de voltaje de los 14 nodos del sistema en coordenadas rectangulares. Los vectores de estados estimados transformados en coordenadas polares se muestran en las figuras 2 y 3 (voltajes y ángulos) para su comparación con los valores calculados del estudio de flujos.

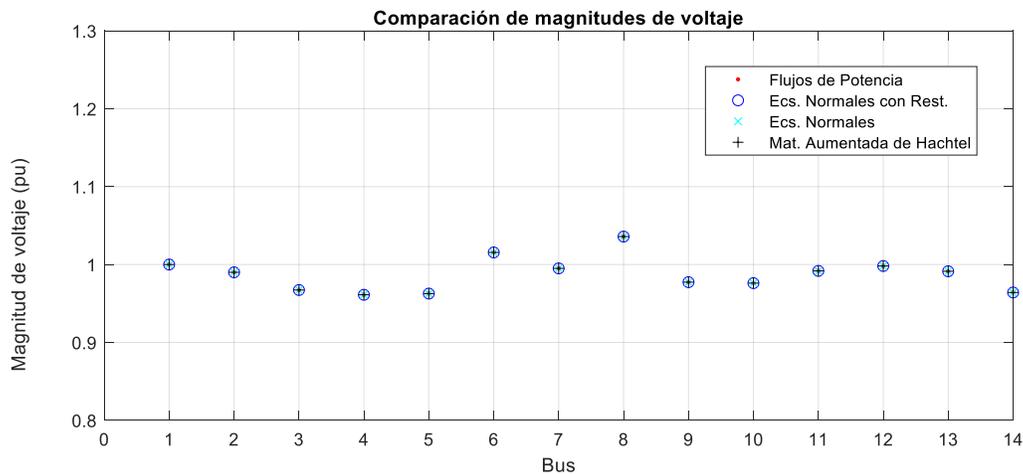


Figura 2. Magnitudes de voltaje.

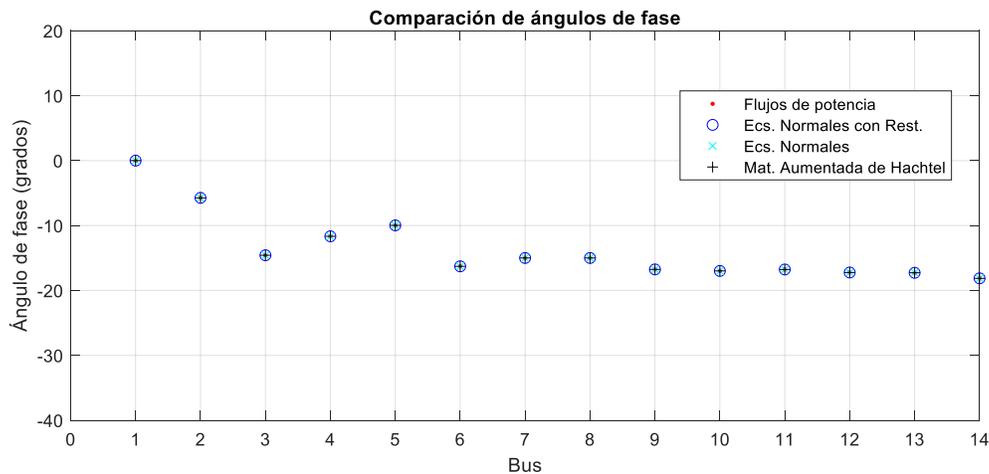


Figura 3. Ángulos de fase.

De acuerdo con las figuras 1 y 2, se puede observar que los valores tanto de las magnitudes y ángulos de voltaje estimados al ser comparados con los resultados calculados por el estudio de flujos de potencia fueron los esperados. Los errores porcentuales medios absolutos resultantes calculados con los tres métodos de solución son mostrados en la Tabla 2. Es claro de la tabla que en los 3 casos se tienen resultados de muy alta precisión y debido a que en ningún caso se consideró error de medición se puede garantizar la validación de los tres métodos de solución.

Por otro lado, se midieron los tiempos de cpu para determinar la velocidad en cada uno de los 3 métodos de solución, resultando un tiempo de 0.000967 segundos para el método de Ecuaciones Normales con restricciones explícitas, mientras que para los métodos de Ecuaciones Normales sin restricciones y la Matriz Aumentada de Hachtel fueron de 0.000584 segundos y 0.001542 segundos, respectivamente. Entonces el método de Ecuaciones Normales sin restricciones fue el más rápido y el método de Hachtel fue el más lento. Este comportamiento se comprobará en trabajos futuros donde se analicen sistemas de dimensiones más grandes.

Tabla 2. Error porcentual medio absoluto (sin error de medición)

| Método de solución | MAE | MAPE |
|----------------------------|-------------|-------------|
| Ecs. Normales con Rest. | 5.501378e-6 | 2.213499e-5 |
| Ecs. Normales | 1.265879e-5 | 2.025672e-5 |
| Matriz Aumentada e Hachtel | 1.409075e-5 | 2.604859e-5 |

Resultados de simulación con error de medición

Para el segundo caso se generó un vector de error aleatorio del orden del 30% del valor de la desviación estándar de la medición de ángulo de los PMUs, el cual se adicionó a las mediciones reales del estudio de flujos de carga, se capturó dicho vector para utilizar el mismo error en los tres métodos, para fines de comparación.

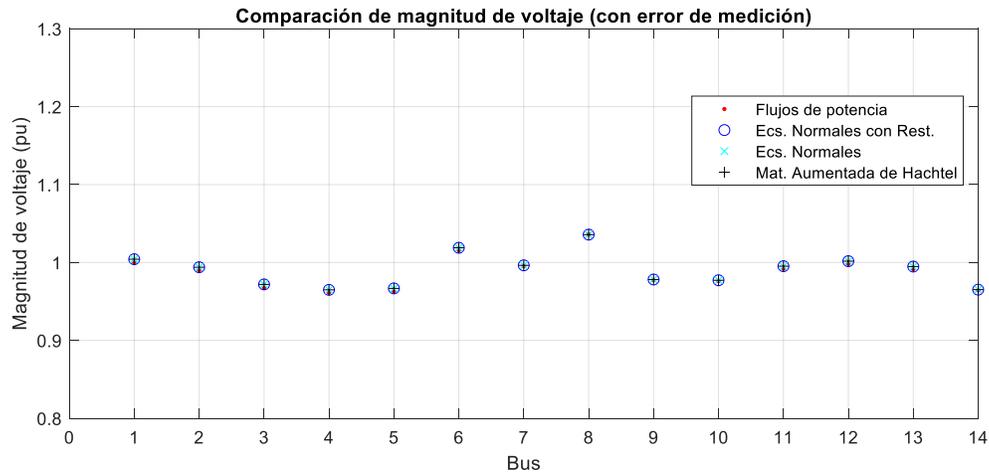


Figura 4. Magnitudes de voltaje (con error).

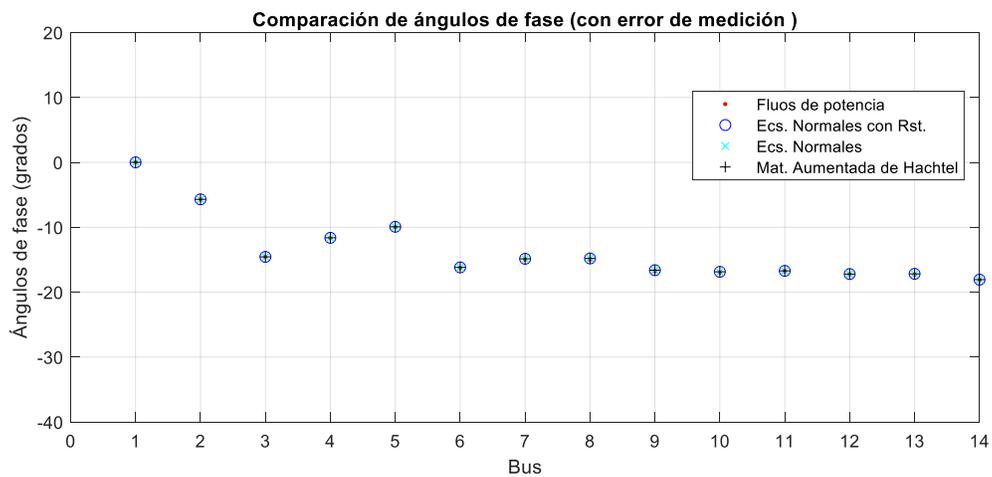


Figura 5. Ángulos de fase (con error).

Las figuras 4 y 5 muestran los resultados obtenidos de los tres estimadores junto con los del estudio de flujos de potencia. Si se hace un zoom lo bastante grande se puede observar que los resultados de los estimadores no son exactamente los mismos en comparación a los datos del estudio de flujos. El estimador debe ser capaz de filtrar el ruido aleatorio en las mediciones y darnos el valor de medición más cercano a la medición real.

Tabla 3. Error porcentual medio absoluto (con error de medición)

| Método de solución | MAE | MAPE |
|----------------------------|------------|------------|
| Ecs. Normales con Rest. | 0.13754137 | 0.27790801 |
| Ecs. Normales | 0.14092192 | 0.27660432 |
| Matriz Aumentada e Hachtel | 0.13753271 | 0.27789317 |

La Tabla 3 muestra que los resultados de los 3 métodos contienen error. Sin embargo, este es muy pequeño y es muy similar en los 3, lo cual indica que los 3 se comportan correctamente ante conjuntos de medición con ruido aleatorio. Por otro lado, los tiempos de CPU son de 0.001889 segundos para el método de Hachtel, de 0.000498 segundos para el método de Ecuaciones Normales sin restricciones y de 0.000964 segundos para el método de Ecuaciones Normales con restricciones. Se puede observar de estos tiempos de CPU que se mantiene el mismo patrón que en el caso sin considerar error de medición.

Conclusión

En este trabajo de investigación se probaron tres estimadores de estado de sistemas de potencia formulados mediante la técnica de optimización de mínimos cuadrados ponderados para sistemas lineales, los cuales fueron resueltos utilizando los métodos de ecuaciones normales sin restricciones y con restricciones explícitas, así como la matriz aumentada de Hachtel. El estudio comparativo se realizó considerando mediciones PMU sin error y con error aleatorio de medición, cuyos resultados permitieron validar las soluciones de los estimadores implementados, los cuáles mostraron una muy alta precisión y muy similar entre ellos. Además, la comparación de los tiempos de cómputo mostró que aunque el sistema de prueba es pequeñas dimensiones el método de ecuaciones normales sin restricciones fue el más rápido, mientras que el método de la matriz aumentada de Hachtel fue el que mostró más latencia. En trabajos futuros se pretende analizar sistemas de más grandes dimensiones para evaluar el desempeño de los 3 estimadores y su idoneidad para su aplicación en estimación de estado de sistemas de potencia en tiempo real.

Bibliografía/Referencias

- [1] Jovicic, A., & Hug, G. (2020). Linear state estimation and bad data detection for power systems with RTU and PMU measurements. IET Generation, Transmission & Distribution, E-First. doi: 10.1049/iet-gtd.2020.0487
- [2] Do Coutto Filho MB, de Souza JCS, Glover JD. Roots, achievements, and prospects of power system state estimation: A review on handling corrupted measurements. Int Trans Electr Energy Syst. 2019;29:e2779. <https://doi.org/10.1002/etep.2779>
- [3] C. N. PÉREZ, H. H. M. LÓPEZ, D. A. G. CONEJO, M. A. T. AHUMADA, J. J. M. ESPINOZA. "Estimación de estados en sistemas de potencia en tiempo real, Gerencia de Control Occidental; parte I: Teoría" Identidad energética, 23 de diciembre de 2022, ISSN: 2448-7775.
- [4] Kothari, D.P. y Nagrath, I.J. (2008) *Sistemas eléctricos de potencia*. 3ªed. Mc Graw Hill.
- [5] A. A. Benítez. " Formulaciones alternativas (mediante la matriz aumentada de Hachtel) del algoritmo WLS para la estimación de estado. TRABAJO DE DIPLOMA. Departamento de Electroenergética. Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas. Santa Clara. 2015.
- [6] Quesada, I.F.; Marchi, P.; Galarza, C.G.; (2019) Estimadores de Estados en Redes Eléctricas Inteligentes: Mediciones SCADA y PMU; XVIII Workshop on Information Processing and Control; Bahía Blanca; Argentina; 2019; 1-6
- [7] Lozano, C.A.; Castro, F.; Ramírez, S.L.; (2012) Unidades de medición fasorial (PMU). El hombre y la máquina No. 38, 66-74.
- [8] J. De La Ree, V. Centeno, J. S. Thorp, A. G. Phadke, "Synchronized Phasor Measurement Applications in Power Systems" IEEE TRANSACTIONS ON SMART GRID, VOL. 1, NO. 1, JUNE 2010, pp. 20-26