



UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

CAMPUS IRAPUATO-SALAMANCA
DIVISIÓN DE INGENIERÍAS

**“Estudio del Error de la Norma Energética
en Mallas Estructuradas y Libres”**

T E S I S

Que para obtener el grado de:
MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA

Presenta:

Adam Hernández Miranda

Asesores:

Dr. Elías Rigoberto Ledesma Orozco

Dr. Miguel Ernesto Gutiérrez Rivera

Salamanca, Guanajuato

Junio 2024

Salamanca, Gto., a 24 de junio del 2024.

M. en I. HERIBERTO GUTIÉRREZ MARTIN
COORDINADOR DE ASUNTOS ESCOLARES
P R E S E N T E.-

Por medio de la presente, se otorga autorización para proceder a los trámites de impresión, empastado de tesis y titulación al alumno(a) Adam Hernández Miranda del **Programa de Maestría en Ingeniería Mecánica** y cuyo número de **NUA** es: 390037 del cual soy director. El título de la tesis es: Estudio del Error de la Norma Energética en Mallas Estructuradas y Libres.

Hago constar que he revisado dicho trabajo y he tenido comunicación con los sinodales asignados para la revisión de la tesis, por lo que no hay impedimento alguno para fijar la fecha de examen de titulación.

A T E N T A M E N T E

Dr. Elías Rigoberto Ledesma Orozco
DIRECTOR DE TESIS
SECRETARIO

Dr. Miguel Ernesto Gutiérrez Rivera
DIRECTOR DE TESIS

M. en I. Octavio García Villazana
PRESIDENTE

Dr. Agustín Vidal Lesso
VOCAL

“Me parece haber sido sólo un niño jugando en la orilla del mar, divirtiéndose y buscando una piedra más lisa o una concha más bonita de lo normal, mientras el gran océano de la verdad yacía ante mis ojos con todo por descubrir”

-Isaac Newton

Pensamiento sobre la profundidad de lo que queda por descubrir, lo grande que es el mundo y la cantidad de cosas que esperan a ser descubiertas por mentes inquietas y curiosas

Agradecimientos

Quisiera expresar mi sincero agradecimiento a todas las personas que contribuyeron de manera significativa a la realización de este proyecto de investigación y al desarrollo de esta tesis.

En primer lugar, deseo expresar mi profunda gratitud a mis directores de tesis, el Dr. Elías Rigoberto Ledesma Orozco y el Dr. Miguel Ernesto Gutiérrez Rivera, por su orientación, apoyo constante y dedicación a lo largo de todo el proceso de investigación. Sus consejos y su compromiso fueron fundamentales para el éxito de este trabajo.

También me gustaría agradecer a los miembros del comité de tesis, M.I. Octavio García Villazana y el Dr. Agustín Vidal Lesso, por su valiosa retroalimentación, sugerencias y contribuciones a este proyecto. Sus conocimientos fueron fundamentales para mejorar la calidad y el rigor de esta investigación.

No puedo dejar de mencionar el inestimable apoyo de mi familia y amigos durante todo este proceso. A mis padres, Dr. Abel Hernández Guerrero y Dra. Rita Miranda López, les debo un profundo agradecimiento por su amor incondicional, su apoyo y su constante aliento. Su sacrificio y dedicación han sido una fuente inagotable de inspiración para mí. A mi esposa, Ing. Nallely Ortega Pérez (próxima M.I.), le agradezco infinitamente su comprensión y aliento durante los momentos difíciles. Su amor y apoyo incondicionales fueron un faro de luz que me guió en los momentos de estrés y cansancio.

Agradezco también a mi gran amigo desde hace 12 años, Ing. Ramón Eduardo Razo Puente (próximo M.I.) por su apoyo durante el estudio de todos estos años y por su amistad, esperando que sean muchos más. Sus ideas y comentarios enriquecieron mi experiencia de investigación y me ayudaron a superar los desafíos que encontré en el camino.

Agradezco también a mis compañeros de la maestría por su amistad a lo largo de este viaje académico. Este trabajo es el resultado del esfuerzo colectivo de muchas personas y representa un hito importante en mi trayectoria académica y profesional. A todos ustedes, les estoy eternamente agradecido.

Resumen

El presente estudio aborda una revisión exhaustiva del método por elementos finitos, así como una investigación detallada sobre técnicas de mallado, estimaciones de error y métricas de calidad del mallado. Se lleva a cabo un análisis comparativo utilizando herramientas de simulación, utilizando ANSYS APDL para mallado estructurado con hexaedros, variando el tamaño del elemento y empleando el porcentaje de error basado en la norma energética como medida de precisión. Posteriormente, se recurre a ANSYS Workbench para realizar mallado libre con tetraedros, verificando la calidad del mallado mediante la métrica del jacobiano.

El objetivo principal del estudio es identificar los parámetros relevantes que influyen en la precisión de la solución utilizando mallas libres, mientras que en mallas estructuradas se busca analizar la precisión de la solución mediante el porcentaje de error estructural en términos de la norma energética. Para obtener estos parámetros relevantes en mallas libres, se emplea un diseño factorial de simulaciones, utilizando herramientas estadísticas para el análisis de los resultados obtenidos. Este enfoque integral busca proporcionar una comprensión profunda de los factores que afectan la precisión de las simulaciones por elementos finitos.

Contenido

AGRADECIMIENTOS.....	I
RESUMEN	II
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. OBJETIVO	2
1.2. ESTRUCTURA DE LA TESIS	3
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO.....	4
2.1. MEDIO CONTINUO Y SU DISCRETIZACIÓN	4
2.2. CALIDAD DE MALLADO	6
2.3. MALLADOS ESTRUCTURADOS Y LIBRES	12
2.4. MÉTODO POR ELEMENTOS FINITOS	14
2.4.1. DETERMINACIÓN DEL VALOR JACOBIANO	16
2.4.2. LÍMITES DE ADVERTENCIA Y ERROR.....	24
2.4.3. LUGARES DE PUNTOS DE INTEGRACIÓN	29
2.4.4. EVALUACIÓN DE DATOS NODALES Y CENTROIDES.	33
2.5. DISEÑO DE EXPERIMENTOS	41
CAPÍTULO 3. ANTECEDENTES.....	47
CAPÍTULO 4. MÉTODOS DE ANÁLISIS Y SIMULACIÓN	54
4.1 PORCENTAJE DE ERROR MEDIANTE LA NORMA ENERGÉTICA.....	54
4.1.1 TÉCNICA DE APROXIMACIÓN DEL ERROR PARA PROBLEMAS BASADOS EN DESPLAZAMIENTOS.....	56
4.2 ANÁLISIS EXPERIMENTAL NUMÉRICO	59
4.2.1 EVALUACIÓN DEL PORCENTAJE DE ERROR EN LA NORMA ENERGÉTICA CON MALLA ESTRUCTURADA EN ANSYS APDL	59
4.2.2 EVALUACIÓN DE PARÁMETROS DE MALLADO PARA UNA MALLA LIBRE EN ANSYS WORKBENCH	67
CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN DE RESULTADOS.....	78
5.1 ANÁLISIS DEL PORCENTAJE DE ERROR EN LA NORMA ENERGÉTICA CON MALLA ESTRUCTURADA EN ANSYS APDL.....	78
5.2 ANÁLISIS DE LOS PARÁMETROS DE MALLADO PARA UNA MALLA LIBRE EN ANSYS WORKBENCH	89
CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO.....	122
6.1 CONCLUSIONES.....	122
6.2 TRABAJO FUTURO.....	125
APÉNDICE I.....	127
APÉNDICE II.....	133
BIBLIOGRAFÍA	147

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 2.1. REGIONES CON GRANDES GRADIENTES DE DEFORMACIÓN/ESFUERZO [9].....	6
FIGURA 2.2. RANGO DE CALIDAD (<i>SKEWNESS</i>) [9].....	8
FIGURA 2.3 DIAGRAMA DE ORTOGONALIDAD DE UN ELEMENTO [12].	8
FIGURA 2.4 RANGO DE CALIDAD (ORTOGONALIDAD) [9].	9
FIGURA 2.5. ELEMENTOS TETRAÉDRICOS. A) ELEMENTO CON RAZÓN DE ASPECTO 1.0 Y B) ELEMENTO CON RAZÓN DE ASPECTO ALTA [14].....	10
FIGURA 2.6. RAZÓN DE ASPECTO DE CADA TIPO DE ELEMENTOS [16].	10
FIGURA 2.7. RAZÓN JACOBIANA DE ELEMENTO TRIANGULARES [10].	11
FIGURA 2.8. EJEMPLOS DE MALLADO ESTRUCTURADO [18].	12
FIGURA 2.9. EJEMPLOS DE MALLADO NO ESTRUCTURADO O LIBRE [18].....	13
FIGURA 2.10. COMBINACIÓN DE MALLADO. A) MALLADO ESTRUCTURADO Y B) MALLADO HÍBRIDO [19].....	13
FIGURA 2.11. DETERMINANTE JACOBIANO [29].....	18
FIGURA 2.12. DETERMINANTE JACOBIANO [29].....	19
FIGURA 2.13. RAZÓN JACOBIANA PARA RECTÁNGULOS [13].	20
FIGURA 2.14. RAZÓN JACOBIANA PARA CUADRILÁTEROS [13].....	21
FIGURA 2.15. RANGO DE VALORES UTILIZANDO MÉTRICA DE MALLADO “MAPDL” [32].....	23
FIGURA 2.16. RANGO DE VALORES UTILIZANDO MÉTRICA DE MALLADO “NODOS DE ESQUINA (PUNTOS NODALES)” [32].....	23
FIGURA 2.17. RANGO DE VALORES UTILIZANDO MÉTRICA DE MALLADO “PUNTOS DE GAUSS” [32].	24
FIGURA 2.18. ELEMENTO <i>BRICK</i> [13].	27
FIGURA 2.19. ELEMENTO TETRAÉDRICO [13].....	27
FIGURA 2.20 LUGARES DE PUNTOS DE INTEGRACIÓN PARA CUADRILÁTEROS [34].....	30
FIGURA 2.21. LUGARES DE PUNTOS DE INTEGRACIÓN PARA ELEMENTOS <i>BRICKS</i> Y PIRÁMIDES [34].	30
FIGURA 2.22. LUGARES DE LOS PUNTOS INTEGRACIÓN PARA TRIÁNGULOS [34].	32
FIGURA 2.23. LUGARES DE PUNTO DE INTEGRACIÓN PARA UN TETRAEDRO [34].	32
FIGURA 2.24. LUGARES DE PUNTOS DE INTEGRACIÓN PARA TRIÁNGULOS Y TETRAEDROS [34].....	32
FIGURA 2.25. ELEMENTOS LINEALES Y CUADRÁTICOS [24].	33
FIGURA 2.26. GEOMETRÍA PLANE 182 (CUADRILÁTERO) [36].....	35
FIGURA 2.27. GEOMETRÍA PLANE 183 (CUADRILÁTERO) [38].....	36
FIGURA 2.28. GEOMETRÍA SOLID 185 (HEXAEDRO) [39].	37
FIGURA 2.29. GEOMETRÍA SOLID 185 CON CAPAS (HEXAEDRO) [39].....	38
FIGURA 2.30. GEOMETRÍA SOLID 186 (HEXAEDRO) [41].	40
FIGURA 2.31. GEOMETRÍA SOLID 186(PIRÁMIDE) [41].	41
FIGURA 2.32. GEOMETRÍA SOLID 186 (TETRAEDRO) [41].	41

FIGURA 4.1. FACTORES DE CONCENTRACIÓN DE ESFUERZOS Kt PARA UNA BARRA A TENSIÓN PLANA ESCALONADA CON FILETES TIPO HOMBRO [65].	60
FIGURA 4.2. VISUALIZACIÓN DE LA INTERSECCIÓN CON LA CURVA PARA VALOR Kt [65].	61
FIGURA 4.3. SIMETRÍA DE LA GEOMETRÍA EN INVESTIGACIÓN.	62
FIGURA 4.4. CONFIGURACIONES GEOMÉTRICAS. A) GEOMETRÍA CORTA Y B) GEOMETRÍA LARGA.	63
FIGURA 4.5. DIVISIONES DE <i>WORKING PLANE</i> . A) PUNTO DE ORIGEN HACIA EL CENTRO DE LA CURVATURA Y B) PUNTO DE ORIGEN HACIA EL FINAL DE LA CURVATURA.	64
FIGURA 4.6. CONDICIONES DE FRONTERA. A) REPRESENTACIÓN EN 2D Y B) REPRESENTACIÓN EN 3D.	66
FIGURA 4.7. PARÁMETROS DE MALLADO GENERAL.	71
FIGURA 4.8. PARÁMETROS DE MALLADO TETRAÉDRICO “ <i>PATCH INDEPENDENT</i> ”.	72
FIGURA 4.9. EJEMPLOS DE COMBINACIONES REALIZADAS CON SUS RESULTADOS.	73
FIGURA 5.1. GEOMETRÍA CON MALLADO CON ELEMENTOS DE UN TAMAÑO DE 0.01.	84
FIGURA 5.2. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN 12.	84
FIGURA 5.3. GEOMETRÍA CON MALLADO CON ELEMENTOS DE UN TAMAÑO DE 0.05.	87
FIGURA 5.4. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN 10, DE LA TABLA 12.	87
FIGURA 5.5. TIPOS DE INTERACCIÓN. A) FACTORES SIN INTERACCIÓN, B) FACTORES CON INTERACCIÓN ANTAGÓNICA Y C) FACTORES CON INTERACCIÓN SINÉRGICA [74].	93
FIGURA 5.8. EJEMPLO DE GEOMETRÍA DISCRETIZADA CON MALLADO LIBRE TETRAÉDRICO.	95
FIGURA 5.9. EJEMPLO DE SIMULACIÓN CON MALLADO LIBRE TETRAÉDRICO.	95
FIGURA 5.10. EFECTOS PRINCIPALES DEL PORCENTAJE DE ERROR ENTRE EL ESFUERZO MÁXIMO PROMEDIADO Y EL ESFUERZO MÁXIMO NO PROMEDIADO.	97
FIGURA 5.11. INTERACCIÓN ENTRE PARÁMETROS PARA EL ANÁLISIS DEL PORCENTAJE DE ERROR ENTRE EL ESFUERZO MÁXIMO PROMEDIADO Y EL ESFUERZO MÁXIMO NO PROMEDIADO.	98
FIGURA 5.12. EFECTOS PRINCIPALES DEL PORCENTAJE DE ERROR ENTRE EL ESFUERZO MÁXIMO PROMEDIADO Y EL ESFUERZO TEÓRICO.	99
FIGURA 5.13. INTERACCIÓN ENTRE PARÁMETROS PARA EL ANÁLISIS DEL PORCENTAJE DE ERROR ENTRE EL ESFUERZO MÁXIMO PROMEDIADO Y EL ESFUERZO TEÓRICO.	101
FIGURA 5.14. EFECTOS PRINCIPALES DEL PORCENTAJE DE ERROR ENTRE EL ESFUERZO MÁXIMO NO PROMEDIADO Y EL ESFUERZO TEÓRICO.	102
FIGURA 5.15. INTERACCIÓN ENTRE PARÁMETROS PARA EL ANÁLISIS DEL PORCENTAJE DE ERROR ENTRE EL ESFUERZO MÁXIMO NO PROMEDIADO Y EL ESFUERZO TEÓRICO.	103
FIGURA 5.16. EFECTOS PRINCIPALES PARA EL TIEMPO DE MALLADO.	104
FIGURA 5.17. INTERACCIÓN ENTRE PARÁMETROS PARA EL TIEMPO DE MALLADO.	105
FIGURA 5.18. EFECTOS PRINCIPALES PARA EL TIEMPO DE SOLUCIÓN.	106
FIGURA 5.19. INTERACCIÓN ENTRE PARÁMETROS PARA EL TIEMPO DE SOLUCIÓN.	107
FIGURA 5.20. EFECTOS PRINCIPALES PARA VALOR JACOBIANO.	108
FIGURA 5.21. INTERACCIÓN ENTRE PARÁMETROS PARA EL VALOR JACOBIANO.	109

FIGURA 5.22. EFECTOS PRINCIPALES PARA LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LOS VALORES JACOBIANOS.	109
FIGURA 5.23. INTERACCIÓN ENTRE PARÁMETROS PARA LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LOS VALORES JACOBIANOS.	110
FIGURA 5.24. DIAGRAMA DE PARETO DEL PORCENTAJE DE ERROR ENTRE EL ESFUERZO MÁXIMO PROMEDIADO Y EL ESFUERZO MÁXIMO NO PROMEDIADO.	113
FIGURA 5.25. GRÁFICA DE EFECTOS PRINCIPALES DEL MODELO PLACKET-BURMAN PARA EL PORCENTAJE DE ERROR ENTRE EL ESFUERZO MÁXIMO PROMEDIADO Y EL ESFUERZO MÁXIMO NO PROMEDIADO.	114
FIGURA 5.26. DIAGRAMA DE PARETO DEL PORCENTAJE DE ERROR ENTRE EL ESFUERZO MÁXIMO PROMEDIADO Y EL ESFUERZO TEÓRICO.	115
FIGURA 5.27. GRÁFICA DE EFECTOS PRINCIPALES DEL MODELO PLACKET-BURMAN PARA EL PORCENTAJE DE ERROR ENTRE EL ESFUERZO MÁXIMO PROMEDIADO Y EL ESFUERZO TEÓRICO.	115
FIGURA 5.28. DIAGRAMA DE PARETO DEL PORCENTAJE DE ERROR ENTRE EL ESFUERZO MÁXIMO NO PROMEDIADO Y EL ESFUERZO MÁXIMO TEÓRICO.	116
FIGURA 5.29. GRÁFICA DE EFECTOS PRINCIPALES DEL MODELO PLACKET-BURMAN PARA EL PORCENTAJE DE ERROR ENTRE EL ESFUERZO MÁXIMO NO PROMEDIADO Y EL ESFUERZO TEÓRICO.	116
FIGURA 5.30. DIAGRAMA DE PARETO DEL TIEMPO DE MALLADO.	117
FIGURA 5.31. GRÁFICA DE EFECTOS PRINCIPALES DEL MODELO PLACKET-BURMAN PARA EL TIEMPO DE MALLADO.	117
FIGURA 5.32. DIAGRAMA DE PARETO DEL TIEMPO DE SOLUCIÓN.	118
FIGURA 5.33. GRÁFICA DE EFECTOS PRINCIPALES DEL MODELO PLACKET-BURMAN PARA EL TIEMPO DE SOLUCIÓN.	118
FIGURA 5.34. DIAGRAMA DE PARETO DE LOS VALORES JACOBIANOS.	119
FIGURA 5.35. GRÁFICA DE EFECTOS PRINCIPALES DEL MODELO PLACKET-BURMAN PARA LOS VALORES JACOBIANOS.	119
FIGURA 5.36. DIAGRAMA DE PARETO DE LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LOS VALORES JACOBIANOS.	120
FIGURA 5.37. GRÁFICA DE EFECTOS PRINCIPALES DEL MODELO PLACKET-BURMAN PARA LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LOS VALORES JACOBIANOS.	120
FIGURA 5.6. 64 COMBINACIONES EXTRAÍDAS DE MINITAB.	133
FIGURA 5.7. RESULTADOS DE LAS 64 COMBINACIONES REGISTRADAS EN MINITAB.	134

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 1. LUGAR DE MUESTREO PARA EL DETERMINANTE DE CADA TIPO DE ELEMENTO [27].....	17
TABLA 2. CRITERIOS DE LA PREFERENCIA FÍSICA DEL SISTEMA EN CUANTO AL LÍMITE DE ERROR Y ADVERTENCIA [33].....	26
TABLA 3. LÍMITES DE ADVERTENCIA Y ERROR DE LA RAZÓN JACOBIANA [13].....	28
TABLA 4. CONSTANTES DE LA INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE GAUSS [34].	29
TABLA 5. INTEGRACIÓN NUMÉRICA PARA TRIÁNGULOS [34].....	31
TABLA 6. INTEGRACIÓN NUMÉRICA PARA TETRAEDROS [34].	31
TABLA 7. COEFICIENTES DE LAS FUNCIONES DE FORMA PARA DISTINTAS GEOMETRÍAS [35].	33
TABLA 7. FILTRO DE PARÁMETROS.....	74
TABLA 8. GEOMETRÍA CORTA 2D – DIVISIÓN AL <i>ENDPOINT</i> DE LA CURVA.	127
TABLA 9. GEOMETRÍA CORTA 2D – DIVISIÓN AL CENTRO DE LA CURVA.	128
TABLA 10. GEOMETRÍA LARGA 2D – DIVISIÓN AL <i>ENDPOINT</i> DE LA CURVA.	129
TABLA 11. GEOMETRÍA LARGA 2D – DIVISIÓN AL CENTRO DE LA CURVA.	130
TABLA 12. GEOMETRÍA CORTA 3D – DIVISIÓN AL <i>ENDPOINT</i> DE LA CURVA.	131
TABLA 13. GEOMETRÍA CORTA 3D – DIVISIÓN AL CENTRO DE LA CURVA.	132
TABLA 14. CANTIDAD DE NODOS Y ELEMENTOS POR SIMULACIÓN.....	135
TABLA 15. MODELO LINEAL GENERAL PARA EL PORCENTAJE DE ERROR ENTRE EL ESFUERZO MÁXIMO PROMEDIADO Y EL ESFUERZO MÁXIMO NO PROMEDIADO.	136
TABLA 16. MODELO LINEAL GENERAL PARA EL PORCENTAJE DE ERROR ENTRE EL ESFUERZO MÁXIMO PROMEDIADO Y EL ESFUERZO TEÓRICO.	137
TABLA 17. MODELO LINEAL GENERAL PARA EL PORCENTAJE DE ERROR ENTRE EL ESFUERZO MÁXIMO NO PROMEDIADO Y EL ESFUERZO TEÓRICO.	138
TABLA 18. MODELO LINEAL GENERAL PARA EL TIEMPO DE MALLADO.	139
TABLA 19. MODELO LINEAL GENERAL PARA EL TIEMPO DE SOLUCIÓN.	140
TABLA 20. MODELO LINEAL GENERAL PARA LOS VALORES JACOBIANOS.	141
TABLA 21. MODELO LINEAL GENERAL PARA LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LOS VALORES JACOBIANOS.....	142
TABLA 22. MODELO PLACKETT-BURMAN PARA EL PORCENTAJE DE ERROR ENTRE EL ESFUERZO MÁXIMO PROMEDIADO Y EL ESFUERZO MÁXIMO NO PROMEDIADO.	143
TABLA 23. MODELO PLACKETT-BURMAN PARA EL PORCENTAJE DE ERROR ENTRE EL ESFUERZO MÁXIMO PROMEDIADO Y EL ESFUERZO TEÓRICO.	143
TABLA 24. MODELO PLACKETT-BURMAN PARA EL PORCENTAJE DE ERROR ENTRE EL ESFUERZO MÁXIMO NO PROMEDIADO Y EL ESFUERZO TEÓRICO.	144
TABLA 25. MODELO PLACKETT-BURMAN PARA EL TIEMPO DE MALLADO.	144
TABLA 26. MODELO PLACKETT-BURMAN PARA EL TIEMPO DE SOLUCIÓN.....	145
TABLA 27. MODELO PLACKETT-BURMAN PARA EL VALOR JACOBIANO.....	145

TABLA 28. MODELO PLACKETT-BURMAN PARA LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR DEL VALOR JACOBIANO.....	146
--	------------

Capítulo 1

Introducción

A través de los años, los científicos han estado analizando maneras de trabajar en la aproximación de modelos usando tecnología para recrear modelos físicos, pero simulándolos mediante programas de computadora. La literatura en este tema ha sido creada como una introducción al elemento finito [1].

Debido a la complejidad de los problemas actuales en ingeniería mecánica, hoy en día el uso de software ingenieril se ha vuelto más y más común entre académicos, estudiantes y campos de ingeniería en general.

El uso de software confiable puede ahorrar tiempo, esfuerzo y recursos mientras provee resultados fidedignos [2]. Por lo tanto, los programas comerciales de Elementos Finitos (EF) proveen una colección de herramientas poderosas y extensivas para el diseño, análisis, y optimización de sistemas ingenieriles complejos. Desgraciadamente, aprender a usar este tipo de software puede ser difícil y el proceso consume tiempo [3].

Dicho esto, el Método por Elementos Finitos (MEF) se ha vuelto esencial para predecir y simular comportamientos físicos para problemas complejos de ingeniería [4]. Es una técnica basada en variaciones de solución mediante ecuaciones diferenciales. Previo al uso de software comercial sobre elementos finitos, los ingenieros necesitan saber cómo se derivan los modelos de elemento finito para los principios básicos que usualmente se expresan en enunciados ya sea diferenciales o integrales [5].

Los ingenieros aprecian la necesidad de lograr un balance entre el uso de métodos simples en el análisis de diseño con idealizaciones no reales para reducir el tiempo y esfuerzo requerido, o

también la realización de análisis sofisticado con poco o nada de idealización de las condiciones físicas reales. En este último, se puede requerir o no, tiempo y recurso; sin embargo, el beneficio permite que los ingenieros usen factores de seguridad muy bajos y, por lo tanto, maximizar el uso de la resistencia de materiales en el análisis. El MEF ofrece dichos beneficios porque es una herramienta analítica útil para un análisis ingenieril sofisticado para los ingenieros y la industria [6].

Actualmente, el MEF se ha expandido y actualizado incluyendo la creciente importancia de la estimación del error; validando y verificando al contemplar investigación contemporánea en modelos seleccionados y controlando los errores del modelado [7] mediante aproximaciones refinadas para minimizar el error dentro del análisis [8].

1.1. Objetivo

El objetivo principal de esta tesis es desarrollar un estudio utilizando un paquete de elemento finito comercial (ANSYS Mechanical APDL y ANSYS Workbench) para obtener parámetros relevantes en la precisión de la solución usando mallas libres; y en mallas estructuradas, por medio del porcentaje de error estructural en términos de la norma energética.

Es necesario contar con conocimiento al tema relacionado con la estimación del error y del uso de software para simulación, por lo que se plantean los siguientes objetivos particulares:

- Investigación del estado del arte sobre la estimación del error, parámetros de calidad de malla, y también, sobre mallas libres y estructuradas.
- Creación de un modelo CAD propuesto.
- Desarrollo utilizando MEF para mallas estructuradas y para mallas libres.
- Analizar los resultados de cada tipo de malla y comparar sus estimaciones del error.

1.2. Estructura de la tesis

La tesis se organizará como se muestra a continuación:

En el Capítulo 2, se proporcionan algunos conceptos necesarios y fundamentales sobre el MEF, la estimación del error, tipos de mallado y parámetros de calidad de malla.

En el Capítulo 3, se da una revisión de los antecedentes relacionados con métodos de simulación para analizar la estimación del error, así como también los mismos métodos de simulación, pero con mallas estructuradas y libres.

En el Capítulo 4, se muestra la elaboración de los modelos diseñados para el análisis del mallado y se describe la metodología de análisis y simulación implementada usando un software comercial de elementos finitos que brindaron la solución del objetivo principal planteado.

En el Capítulo 5, se discuten y analizan los resultados obtenidos de la metodología de simulación.

En el Capítulo 6, se presentan las conclusiones obtenidas de la discusión de resultados y el trabajo futuro.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Medio continuo y su discretización

El medio continuo es una conceptualización matemática que considera que todo sólido es homogéneo y las propiedades físicas se preservan independientemente de la porción del sólido analizado. El medio continuo cuando está sometido a diferentes cargas sufre deformaciones, y estas deformaciones son descritas en el tiempo y en el espacio por ecuaciones diferenciales parciales.

Resolver estas ecuaciones diferenciales puede ser muy costoso en tiempo de cómputo y en otros casos imposibles al tener geometrías muy complejas. Existen ocasiones que son posibles, sin embargo, puede requerir mucho tiempo para solucionarlas.

El MEF permite discretizar el medio continuo para poder aproximar las soluciones a estas ecuaciones diferenciales.

Los fenómenos físicos se diferencian en espacio y tiempo, por lo que las ecuaciones diferenciales pueden ayudar a descubrir qué ocurre en el espacio y qué ocurre en el tiempo. El medio continuo es la geometría real mientras que el mallado separa en elementos dicha geometría. Cuando se menciona el término “discretizar el medio continuo” se refiere al mallado.

El mallado es un proceso de discretización de un cuerpo continuo hacia un número finito de elementos. El principio de esta discretización es un seccionamiento geométrico dividiendo la geometría en regiones más simples logrando una mejor eficiencia en el producto final para la solución de las ecuaciones diferenciales.

Un mallado muy fino llevará a resultados más cercanos a la realidad, pero un tiempo de solución más alto mientras que un mallado burdo y rápido, puede llevar a soluciones erróneas. Siempre es difícil que un ingeniero en el área CAE (Computer Aided Engineering por sus siglas en inglés) tome una decisión correcta en la cantidad de elementos que debe usar en un análisis. Para esto, es necesario dedicar bastante tiempo para una mejor calidad de malla, en especial utilizando elementos hexaédricos; si se utilizan tetraedros, el mallado es más rápido.

El orden en el cual se realiza el proceso de mallado empezando por la región más sencilla también afecta como se mallan los componentes siguientes. La importancia de la discretización es para poder aproximar lo que ocurre en el sólido y, dependiendo de la calidad del mallado, los resultados se verán fuertemente influenciados.

Es por ello que existen reglas generales para realizar el proceso de mallado:

- a) Utilizar los elementos más adecuados que describan el fenómeno atendiendo al conocimiento. Como ingenieros o diseñadores, se tiene que intuir qué puede pasar, entonces es necesario conocer también cuales elementos permiten describir los fenómenos físicos que se espera que ocurran.
- b) Utilizar el mínimo refinamiento que capture el fenómeno físico dominante, porque si se utiliza un mallado bastante fino en regiones que no son de interés, se estarán utilizando recursos computacionales de una manera ineficiente. El conocimiento de la física del problema, y la experiencia con el mallado por EF ayuda a tener puntos de partida para comenzar el mallado.
- c) Refinamiento en regiones con grandes gradientes de deformación/esfuerzo. En la Figura 2.1 se muestran algunos ejemplos de este apartado.

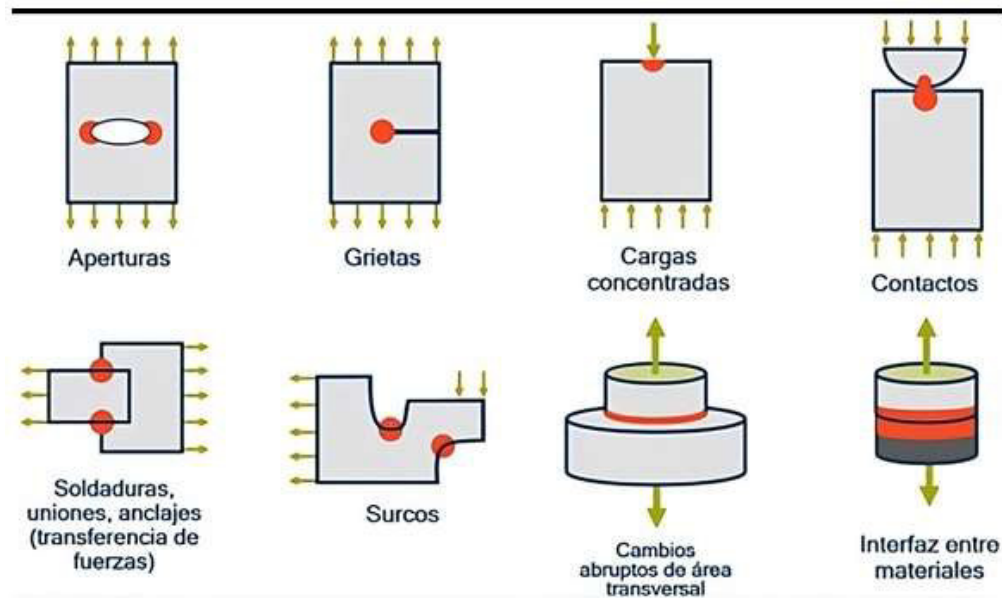


Figura 2.1. Regiones con grandes gradientes de deformación/esfuerzo [9].

2.2. Calidad de Mallado

Las soluciones por EF se volvieron vitales para sistemas de ingeniería complejos que no son simples de analizar utilizando métodos tradicionales. Al comparar con aproximaciones teóricas, los modelos de EF son capaces de tratar con problemas multi-físicos. Sin embargo, existen dos pasos en el procedimiento cruciales, los cuales son el acomodo del mallado y la prueba de calidad del mallado.

Los mallados que son suficientemente buenos son los que producen resultados con un nivel aceptable de veracidad, asumiendo que todos los datos de entrada en el modelo son precisos; la densidad de malla es un factor importante para el control de precisión (el tipo de elemento y la forma también afectan a la precisión).

Asumiendo que no hay singularidades presentes, una malla con alta densidad puede producir resultados con alta precisión. Sin embargo, si una malla es muy densa, requerirá una gran cantidad de memoria computacional y tiempos de simulación largos, especialmente para simulaciones con iteración múltiple, tipos de análisis no lineal y/o transitorio.

Hay diversas maneras de checar la calidad de malla:

- Características del software para control de malla.
- Métricas de malla.
- Análisis de convergencia.
- Valores teóricos o datos experimentales.

Desafortunadamente, datos experimentales y resultados teóricos no siempre se encuentran disponibles. Por lo tanto, se necesitan otros medios para evaluar la calidad de malla.

Las métricas de malla es una de las maneras más útiles para determinar el tamaño y forma correcta de los elementos, mientras que el análisis de convergencia es el método más fundamental y preciso para evaluar la calidad de malla refinando el mallado hasta un resultado crítico, como cuando el esfuerzo máximo en un lugar en específico converge (esto quiere decir que sus resultados no cambian significativamente con cada refinamiento). El problema con este método es que requiere remallar múltiples veces y volver a resolver las operaciones. Este método es ideal para modelos simples, ya que, para modelos complejos, puede consumir mucho tiempo [10].

Debido a que la calidad de malla juega un rol muy importante en la veracidad de los resultados, existen algunos parámetros de la métrica de malla sumamente importantes para corroborar la precisión de resultados en cuanto al análisis de la calidad del mallado: la asimetría u oblicuidad, la ortogonalidad, la razón de aspecto y la razón Jacobiana.

a) Asimetría u oblicuidad (*skewness*)

La asimetría u oblicuidad (*skewness*) ayuda a determinar qué tan cerca se encuentra el usuario de una cara ideal para un elemento de la geometría. Una cara ideal para un elemento triangular en 2D o tetraedro en 3D, es cuando dicha cara sea un triángulo equilátero perfecto, sin embargo, pueden existir caras muy deformadas, es decir, oblicuas [11].

Para los elementos cuadriláteros en 2D y hexaédricos en 3D, lo ideal es tener caras equiangulares, sin embargo, también en elementos distorsionados se encuentran las oblicuidades.

Para el parámetro de *skewness*, lo ideal es trabajar en el proceso de mallado dentro de un rango de simetría entre 0 y 0.25, aunque en algunos casos tener la simetría de 0.5 se considera aceptable. En la Figura 2.2, se muestran los valores de simetría con su rango de clasificación con respecto a la idealidad.

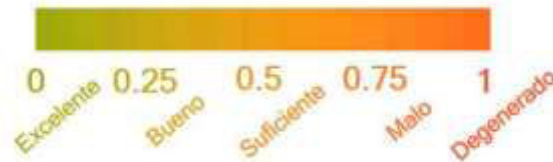


Figura 2.2. Rango de calidad (*skewness*) [9].

b) Ortogonalidad

El segundo parámetro de calidad es la ortogonalidad. En la Figura 2.3 se explica este parámetro mediante un diagrama donde se tiene un elemento con 3 vectores de interés; el vector normal de alguna cara que se proyecta hacia afuera del elemento (\vec{A}_i), también se tiene un vector que va del centroide del elemento al centroide de la cara (\vec{F}_i), y finalmente un vector que se proyecta del centroide de un elemento hacia el centroide de otro elemento (\vec{C}_i).

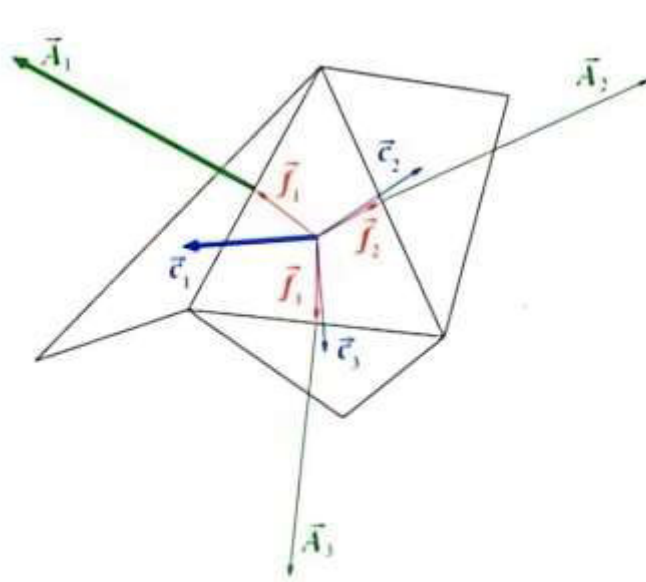


Figura 2.3 Diagrama de ortogonalidad de un elemento [12].

Este parámetro relaciona qué tan bien ligados se encuentra un elemento con respecto al otro. Si existe un desfase entre los distintos vectores normales tanto de las caras como de los centroides de los elementos, se tendrán valores que indican que los elementos entre uno y otro no se encuentran ligados.

En la Figura 2.4 se observa el rango de calidad para este parámetro, donde, en caso contrario al parámetro de *skewness*, en la ortogonalidad se busca que la calidad del elemento se encuentre en un rango entre 0.7 y 1, aunque en algunos casos tener la ortogonalidad entre 0.20 y 0.69 se considera aceptable.

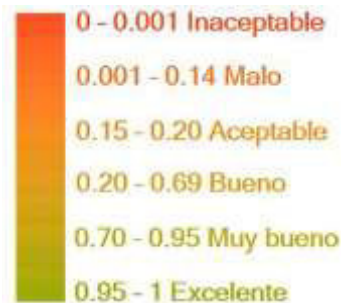


Figura 2.4 Rango de calidad (ortogonalidad) [9].

c) Razón de aspecto

Para un mallado sólido, es posible conseguir la mejor veracidad numérica con un mallado que tiene elementos tetraédricos uniformemente perfectos cuyos bordes son iguales en longitud. Para una geometría general, no es posible crear un mallado perfecto con elementos tetraédricos.

Debido a los bordes pequeños, geometría curva, características delgadas y esquinas afiladas, algunos de los elementos generados pueden tener bordes más largos que otros. Cuando los bordes de un elemento difieren substancialmente en longitud, los resultados son menos precisos.

La razón de aspecto de un elemento tetraédrico perfecto es usada como base para calcular razones de aspecto de otros elementos. Esta razón de aspecto del elemento se define como la relación entre el lado más largo y la normal más corta del vértice hacia la cara opuesta, normalizada en relación con un tetraedro ideal.

Por definición, la razón de aspecto de un elemento tetraédrico perfecto asumiendo bordes rectos conectando los 4 nodos de las esquinas es 1 (Figura 2.5a), mientras que un elemento tetraédrico con bordes largos y una normal entre el vértice y la cara opuesta muy alejada tiene razones de aspecto altas (Figura 2.5b), lo cual lo hace menos preciso [13].



Figura 2.5. Elementos tetraédricos. a) Elemento con razón de aspecto 1.0 y b) Elemento con razón de aspecto alta [14].

La razón de aspecto de un elemento 2D hexaédrico es definido como la razón de la longitud más corta del borde con la longitud más larga. Un cuadrado tiene una razón de aspecto de 1 mientras sus lados tengan la misma longitud.

Una calidad de mallado que se considera aún buena tiene una razón de aspecto menor a 5 en la mayoría de sus elementos [15]. En la Figura 2.6 se muestran los diferentes tipos de elementos que existen junto con su respectiva ecuación para calcular la razón de aspecto dependiendo de las longitudes de los bordes que tienen.

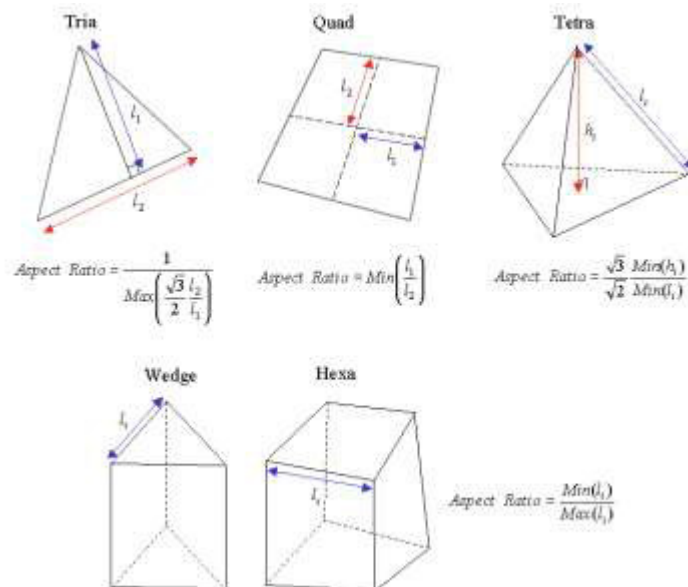


Figura 2.6. Razón de aspecto de cada tipo de elementos [16].

d) Razón Jacobiana

La razón Jacobiana se encuentra en los nodos laterales medios del elemento en estructuras malladas. Ésta mide la desviación en la forma de un elemento de su forma ideal (una que tiene bordes rectos con longitudes iguales). Si en un triángulo, el nodo lateral medio de un elemento se encuentra exactamente en medio de un borde, la razón Jacobiana es 1, por lo tanto, la razón Jacobiana de un elemento tetraédrico perfecto de segundo orden con bordes lineales es 1.

Esta razón de un elemento incrementa conforme la curvatura de los bordes del elemento se incrementa para mapear una geometría curva. En el caso que la razón Jacobiana de un triángulo o un cuadrilátero se incrementa, los nodos laterales medios de los bordes del elemento se distorsionan hacia el centro (Figura 2.7) [17].



Figura 2.7. Razón Jacobiana de elemento triangulares [10].

Cerca de fronteras extremadamente afiladas o curvas, los bordes de un elemento pueden cruzarse entre sí y el elemento se comienza a distorsionar, resultando en una geometría donde se auto intercepta.

La prueba de razón Jacobiana considera los puntos de Gauss localizados dentro de cada elemento. Una buena calidad de mallado tiene una razón Jacobiana de entre 1 y 10 en la mayoría de sus elementos [15]. Por ende, la razón Jacobiana debe ser lo más cercano a 1 para un mallado estructural perfecto en ANSYS.

En muchos modelos, los elementos en regiones con alta curvatura tienen razones de aspecto y Jacobianos muy altos. Si los elementos con razones mayores a 10 se encuentran lejos de las áreas críticas del análisis, puede ser que no valga la pena refinar la malla en estas áreas, si el nivel de los resultados es adecuado para el problema específico. Sin embargo, para áreas donde la simulación

es crítica, se puede refinar el mallado local para reducir estas razones por la calidad pobre de elementos y, así, mejorar los resultados de la simulación.

Según la geometría del modelo, puede que niveles adicionales de refinamiento de la malla no mejoren la calidad de ésta ni los resultados de la simulación. Después de cada nivel del refinamiento de malla, es necesario confirmar que la calidad de malla en las razones tanto de aspecto como Jacobianas muestren una menor cantidad de elementos con mallado pobre. Aunado a esto, se debe asegurar que después de cada refinamiento exitoso de malla, los resultados de simulación convergen a valores finitos [15].

2.3. Mallados estructurados y libres

Los mallados estructurados (Figura 2.8) tienden a ser muy regulares geoméricamente hablando porque se ligan a los elementos cuadriláteros en dos dimensiones y a los elementos hexaedros en tres dimensiones.

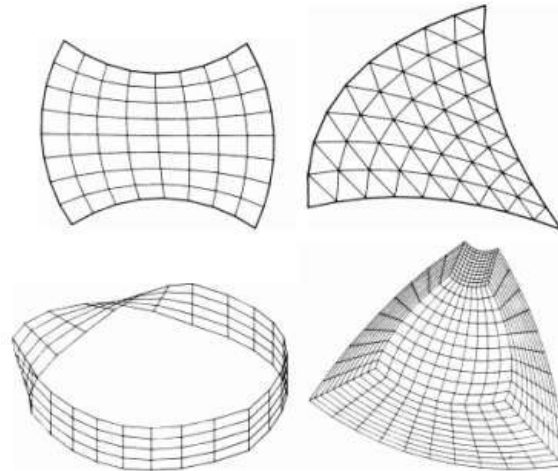


Figura 2.8. Ejemplos de mallado estructurado [18].

Las ventajas de este tipo estructurado, es que tiene regularidad en el mallado; por lo tanto, hay mayor convergencia, se llega a la solución más rápido teniendo resultados buenos, y también hay optimización de espacio al no gastar tantos elementos describiendo una región, aunque de igual manera depende de la región.

Los mallados no estructurados o libres (Figura 2.9) están ligados a los triángulos en casos bidimensionales y tetraedros en casos tridimensionales. Las ventajas de este mallado es que permite definir curvaturas a detalle, lo cual con mallado estructurado es más difícil y costoso en cómputo. En caso de triángulos o tetraedros es más fácil trazar curvas, por lo tanto, son elementos muy versátiles.

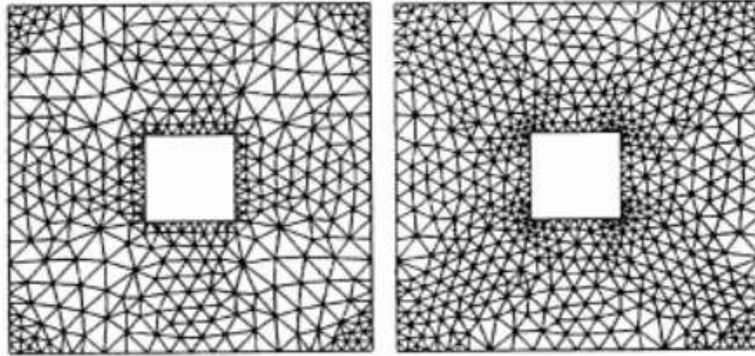


Figura 2.9. Ejemplos de mallado no estructurado o libre [18].

Sin embargo, una muy buena aproximación es utilizar mallas híbridas, ya que permiten combinar en ciertas regiones de interés elementos estructurados y utilizar en otras regiones que no sean tanto del interés o que cueste trabajo mallar, un mallado libre. Asegurándose de evitar la transición en zonas importantes, donde se requiere mayor confiabilidad de resultados.

En la Figura 2.10a se muestra un mallado estructurado mientras que en la Figura 2.10b se muestra un mallado híbrido.

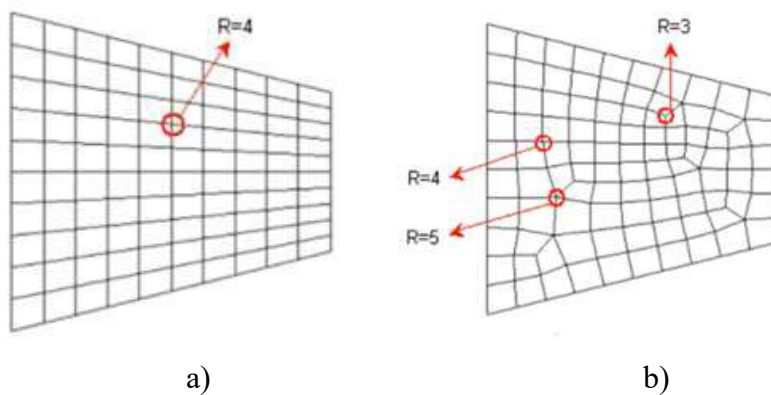


Figura 2.10. Combinación de mallado. a) Mallado estructurado y b) Mallado híbrido [19].

2.4. Método por Elementos Finitos

El Análisis por Elementos Finitos (AEF) es una herramienta de diseño avanzada el cual requiere que el usuario formule el problema de diseño para ser utilizado como un modelo computarizado apropiado. AEF es un tipo de computación numérica que aproxima la solución de un modelo matemático. Este tipo de análisis es crítico para modelar problemas de diseño adecuadamente, para que una solución aproximada pueda converger [20].

Para asegurar la precisión de resultados, se puede estimar el error en estas soluciones al interpretar un estudio de convergencia, algunas veces denominado “estudio de refinamiento de malla”. Para esto, se obtienen diversas soluciones de prueba, cada una con mayor o menor grados de libertad en el modelo, y de esta manera, estimar el error [21].

Se puede decir, entonces, que el MEF es una técnica matemática para configurar y resolver sistemas de ecuaciones diferenciales parciales. En ingeniería, el MEF es usado para dividir un sistema cuyo comportamiento no puede predecirse utilizando ecuaciones de forma cerrada en pequeñas piezas o elementos, cuya solución es conocida o puede ser aproximada [3].

El MEF requiere que la geometría del sistema sea definida por una serie de puntos en el espacio llamados “nodos”. Cada nodo en el mallado de elementos finitos posee un cierto número de grados de libertad. Por ejemplo, en un análisis de esfuerzos en 2D, cada nodo tiene dos grados de libertad: traslación en las direcciones X e Y. En cambio, para un análisis térmico cada nodo tiene un solo grado de libertad, que es la temperatura nodal. Estos grados de libertad son esenciales para definir el comportamiento de los elementos en respuesta a diferentes cargas y condiciones ambientales.

Para algunos elementos, como vigas, la solución de forma cerrada es conocida. Para otros elementos, como elementos continuos, la interacción entre los grados de libertad es estimada por una integración numérica sobre el elemento. Finalmente, estas ecuaciones son solucionadas para revelar información útil sobre el comportamiento del sistema [22].

Para cada elemento de la malla, se define un vector que almacena todos los grados de libertad para ese elemento. Un elemento de viga simple en un análisis bidimensional [23], por ejemplo, tendrá cuatro grados de libertad en total (dos en cada nodo), por ejemplo:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

También, cada elemento de una malla posee una cierta cantidad de rigidez, que determina el desplazamiento de los nodos del elemento cuando se aplican fuerzas sobre ellos. Este comportamiento se puede representar mediante la ecuación que se muestra a continuación [5]:

$$Ku = F$$

Donde:

- K es la matriz de rigidez del elemento
- u es el vector de desplazamientos nodales
- F es el vector de fuerzas aplicadas

Esta ecuación describe una relación lineal entre las fuerzas aplicadas y los desplazamientos resultantes, permitiendo predecir el comportamiento del elemento bajo diferentes condiciones de carga. La matriz de rigidez K incorpora las propiedades materiales y geométricas del elemento. A continuación, se muestra una matriz de rigidez utilizada para un elemento tipo viga en 2D [23].

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez siempre es una matriz cuadrada, donde el número de filas y el número de columnas es igual al número de grados de libertad del elemento. Esta matriz se deriva de las ecuaciones de equilibrio que gobiernan el comportamiento del elemento. Una vez que las matrices de rigidez de todos los elementos son definidas, se combinan para formar una gran matriz de rigidez global que representa la rigidez de la estructura completa [24].

Dado que un nodo está conectado con múltiples elementos, los términos de rigidez asociados a grados de libertad específicos contribuyen a la rigidez de varios elementos diferentes. En otras palabras, la forma en que se ensamblan estas matrices de rigidez depende de cómo se conectan los elementos del mallado [24].

2.4.1. Determinación del valor Jacobiano

El cálculo del Jacobiano se realiza en los puntos de integración de los elementos conocidos como puntos de Gauss. En cada punto de integración, se calcula el determinante Jacobiano, y la razón Jacobiana se encuentra por la razón del valor del determinante máximo y mínimo. El determinante Jacobiano de elementos 2D se calcula después de haber sido proyectado en un plano, y el determinante de elementos 3D se encuentra por cálculo directo [16]. Si el elemento cuadrilátero no es convexo, la razón Jacobiana de este elemento extremadamente distorsionado será negativo, y elementos con razones negativas no pueden ser solucionadas con resultado correcto y causa que el análisis se aborte con mensaje de error [25].

La razón Jacobiana del determinante máximo y el determinante mínimo se calcula para cada elemento. Esta prueba de la forma del elemento puede ser usada para identificar los elementos con esquinas interiores que tengan ángulos lejanos a los 90 grados o elementos de mayor orden con nodos laterales medios fuera de lugar [26].

La razón Jacobiana se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{R_{jmax}}{R_{jmin}}$$

Donde $R_j = \det(J_F)$ depende del lugar de muestreo (Tabla 1).

J_F se describe con la siguiente matriz en 2D:

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, si R_{jmax} y R_{jmin} tienen signos opuestos, entonces la razón Jacobiana tendría un resultado negativo, lo cual, como se mencionó anteriormente, no es aceptable, ya que la razón Jacobiana debe ser mayor o igual a 1. Una razón muy alta indica que el mapeo entre el espacio del elemento y el espacio real se está convirtiendo en un cálculo no confiable.

Tabla 1. Lugar de muestreo para el determinante de cada tipo de elemento [27].

Forma del elemento	Lugar de muestreo R_j para razón Jacobiana (MAPDL) y razón Jacobiana (Puntos Nodales)	Lugar de muestreo R_j para razón Jacobiana (Puntos de Gauss)
Tetraedro 10 nodos	Nodos de esquina	4 puntos de cuadratura de Gauss
Pirámides 5 nodos o 13 nodos	Nodos de esquinas base y cerca del nodo del vértice (<i>el vértice R_j factorizado para que una pirámide teniendo todos los bordes con longitud igual producirá una razón Jacobiana de 1</i>)	5 nodos utilizan 1 punto de cuadratura de Gauss mientras que 13 nodos utilizan 8 puntos de cuadratura de Gauss
Cuadriláteros 8 nodos	Nodos de esquina y centroide	4 puntos de cuadratura de Gauss
Hexaedros 20 nodos	Todos los nodos y centroide	8 puntos de cuadratura de Gauss
Otros elementos	Nodos de esquina	Escoge el mejor número de cuadraturas de Gauss para su integración

La razón Jacobiana de un elemento se calcula mediante los siguientes pasos, utilizando una configuración completa de nodos para el elemento [27]:

- En cada lugar de muestreo de la Tabla 1, el determinante de la matriz Jacobiana es calculada y denominada R_j .
- En un punto específico, R_j denota la magnitud de la función de mapeo entre las coordenadas naturales del elemento y el espacio físico real [28]. En un elemento con forma ideal, R_j es relativamente constante sobre el elemento y no cambia de signo.
- Si el elemento es un tetraedro con nodo intermedio, un R_j adicional es calculado para un tetraedro ficticio con lados rectos conectado a los cuatro nodos de las esquinas. Para la razón Jacobiana (MAPDL), si ese R_j difiere en signo de cualquier R_j nodal (una ocurrencia extremadamente rara), la razón jacobiana es arbitrariamente asignada a ser -100, en el caso de la razón Jacobiana con Puntos Nodales o con Puntos de Gauss se le asigna un valor de -1.

- Si el elemento es lineal, teniendo un nodo intermedio, la matriz Jacobiana no es cuadrada (debido a que el mapeo es de una coordenada natural a un espacio 2D o 3D), y no tiene determinante. En este caso, un cálculo de vectores es usado para determinar un número, el cual se comporta como una razón Jacobiana. Este cálculo tiene el efecto de limitar el recorrido del arco por un único elemento a aproximadamente 106 grados.

En el AEF, la matriz Jacobiana es un componente crucial que consiste en una matriz de derivadas parciales que establecen la relación entre el sistema coordenado del elemento y el sistema coordenado global. Esta matriz desempeña un papel fundamental al mapear las coordenadas físicas de un elemento a las coordenadas naturales del elemento, simplificando así la integración de la matriz de rigidez del elemento sobre el dominio del elemento.

El determinante Jacobiano, por su parte, constituye un valor escalar derivado de la matriz Jacobiana. Se define como el determinante de la matriz de derivadas parciales y representa el factor de escala que refleja el cambio en volumen o área al transformarse de un espacio físico a un espacio natural o paramétrico del elemento (Figura 2.11).

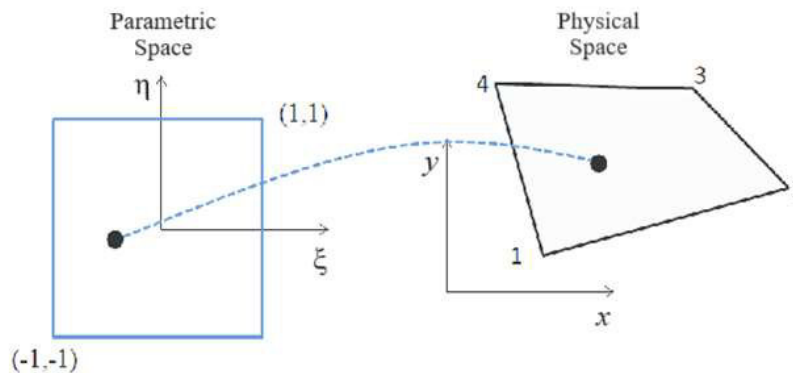


Figura 2.11. Determinante Jacobiano [29].

Al evaluar la matriz Jacobiana para el elemento, se determina el grado de distorsión del mismo con respecto a su forma ideal de un cuadrado regular de dimensiones 2×2 como se observa en la Figura 2.12 [29].

Para comprender la importancia del Jacobiano, es fundamental entender la necesidad que surge de su utilización. En el contexto del MEF, su aplicación se vuelve imprescindible debido a la dificultad inherente de resolver o formular ecuaciones en el sistema coordenado actual. Por tanto,

una de las estrategias empleadas consiste en transformar cada elemento del modelo en una figura geométrica idealizada. Por ejemplo, un elemento de cuatro lados se transforma en una forma cuadrangular de largo 2 unidades, y con coordenadas que varían desde -1 hasta 1 en ambos ejes.

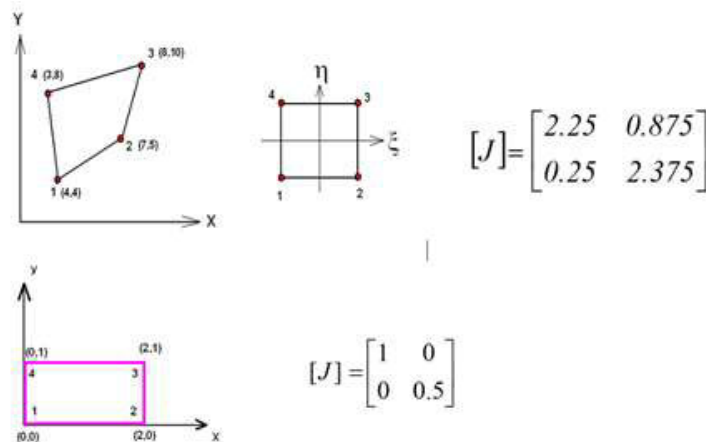


Figura 2.12. Determinante Jacobiano [29].

Este nuevo sistema de coordenadas es conocido como Sistema Coordinado Natural. Ahora, debido a esta transformación, se logra una geometría ideal que facilita significativamente la integración de las funciones mediante técnicas como la cuadratura de Gauss.

La cuadratura de Gauss simplifica la integración y la convierte en una suma ponderada. Suponiendo que una función $f(x)$ debe ser integrada con respecto a x variando desde -1 a 1, la cuadratura de Gauss asigna ciertos puntos ponderados, $H(i)$, y sus correspondientes posiciones en el eje -1 a 1, $x(i)$. La integración es entonces aproximada como la suma de la multiplicación de la ponderación por el valor de la función en un punto de Gauss; es decir, la sumatoria de $H(i) \times f(x(i))$. La precisión de la integración aumenta con un mayor número de puntos de Gauss, aunque la mínima cantidad necesaria de puntos de Gauss depende de la complejidad de la función a integrar.

Una vez realizada la integración en el sistema coordinado natural, los valores de integración obtenidos son transformados de vuelta al sistema coordinado real. En este proceso, el Jacobiano proporciona una metodología para transformar entre sistemas coordinados reales y naturales, y viceversa. Esto es esencial para garantizar que los resultados de las integraciones sean aplicables en el contexto del problema original, permitiendo una interpretación y aplicación precisa en el AEF.

En el MEF, la verificación de la calidad del elemento se relaciona con el determinante de la matriz Jacobiana, también conocida como la Matriz de Transformación. Al transformar las coordenadas naturales de vuelta al sistema coordenado real, es necesario invertir la matriz Jacobiana, por lo que esta matriz debe ser invertible.

Por esta razón, cuando un elemento es perfectamente cuadrado, su Jacobiano será 1, indicando que los resultados obtenidos de dicho elemento serán confiables. Sin embargo, si el elemento está fuertemente distorsionado (por ejemplo, si un borde es significativamente más pequeño en comparación con otro), el Jacobiano será muy pequeño o muy grande, lo que puede llevar a que los resultados de ese elemento no sean considerados confiables [30].

Un triángulo o tetraedro tiene una razón Jacobiana de 1 si cada nodo intermedio, está posicionado en el promedio del correspondiente lugar con respecto a los nodos de las esquinas. Esto es cierto sin importar cuán distorsionado pueda estar el elemento. Por lo tanto, este cálculo es omitido completamente para tales elementos.

Mover un nodo intermedio lejos de la posición del punto medio de un borde incrementará la razón Jacobiana. Eventualmente, incluso un ligero movimiento romperá el elemento. La descripción de “romper” es cuando el elemento cambia repentinamente de aceptable a inaceptable. Este mismo efecto ocurre en el caso de los rectángulos (Figura 2.13).

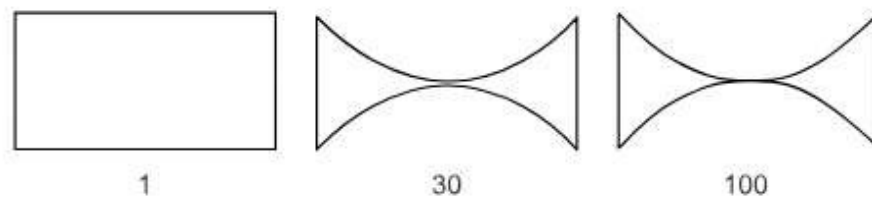


Figura 2.13. Razón Jacobiana para rectángulos [13].

Un cuadrilátero o hexaedro tiene una razón Jacobiana de 1 si sus caras opuestas son todas paralelas a cada una, y cada nodo intermedio, en caso de tener, está posicionado en un promedio correspondiente a la posición de los nodos de las esquinas [27]. Al igual que los casos anteriores, si sus nodos se mueven del lugar que les corresponde tener idealmente, su razón Jacobiana incrementará (Figura 2.14).

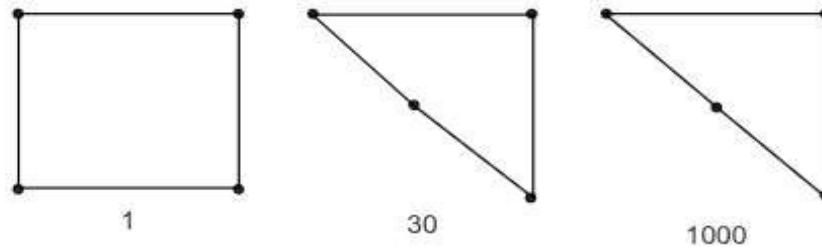


Figura 2.14. Razón Jacobiana para cuadriláteros [13].

La razón Jacobiana es una medida de forma de un elemento dado comparándolo con aquel que tiene una forma ideal. Si un elemento tiene una razón Jacobiana de mala calidad, el elemento puede no trazarse de manera correcta de un espacio del elemento a un espacio real, de manera que, se tendrían cálculos basados en la forma del elemento menos confiable. La forma ideal de un elemento depende del tipo de elemento.

La razón Jacobiana no es calculada para triángulos y tetraedros que son lineales (sin nodos intermedios). Esto es porque la función de forma para estos tipos de elementos es lineal, y las derivadas parciales de una función lineal son constantes. Por lo tanto, el determinante de una razón Jacobiana para estos tipos de elementos es constante sobre todo el elemento lo que significa que $R_{jmin} = R_{jmax}$. Para estos tipos de elementos, la razón Jacobiana siempre será 1.

Existen tres maneras de calcular la razón Jacobiana: ya sea basado en nodos de esquinas (puntos nodales), basado en el solucionador MAPDL, o basado en puntos de Gauss (puntos de integración). Los cálculos son más restrictivos en los puntos nodales mientras que en los puntos de integración son menos restrictivos [27].

Para observar la información de la métrica de mallado de estos cálculos, se debe de seleccionar ya sea:

- a) **Jacobian Ratio (Corner Nodes)**, el cual se encuentra limitado desde -1 (peor) hasta 1 (mejor).
- b) **Jacobian Ratio (MAPDL)**, el cual es usado por el solucionador MAPDL, que es el inverso del Jacobian Ratio (Corner Nodes). Éste se encuentra desde menos infinito hasta más infinito, pero todos los elementos con valores negativos serán agrupados y se les asignará

arbitrariamente un valor de -100 por propósitos de la métrica de mallado. Para esto, un elemento con una razón Jacobiana menor o igual a 0, debe ser evitada. El valor de 1 es un valor ideal, mientras que un valor mayor significa que el elemento se estará deformando cada vez más.

- c) ***Jacobian Ratio (Gauss Points)***, el cual se encuentra limitado desde -1 (peor) hasta 1 (mejor).

Cabe mencionar que, al inicializar el software, cuando las preferencias físicas están configuradas para “Mechanical”, la opción de límites del error para un control de forma se encuentra configurada a “Standard Mechanical”. Los cálculos de razón Jacobiana utilizados en ese caso analizan los puntos de Gauss más no analizan los nodos de las esquinas. Esto lleva a una situación donde se tiene un elemento con una razón Jacobiana (Puntos de Gauss) que es mayor a 0 y una razón Jacobiana (puntos nodales) que es menor o igual a 0 [31].

A continuación, se muestran las mismas formas geométricas de las Figuras 2.7, 2.13 y 2.14, pero con los valores respectivos que tendrían al seleccionar cada una de las métricas de mallado mencionadas anteriormente. En la Figura 2.15 se observa la métrica para la razón Jacobiana (MAPDL), en la Figura 2.16 se presenta la razón Jacobiana para puntos nodales, y en la Figura 2.17 se muestra la razón Jacobiana para puntos de Gauss.

Como puede observarse en las figuras, se presenta una paleta de colores que permite determinar los valores de la razón Jacobiana. Esta paleta codifica los valores en diferentes tonalidades, facilitando la interpretación visual de los datos. Dependiendo de las variaciones mostradas en las figuras, los diferentes colores reflejan los distintos valores de la razón Jacobiana, proporcionando una representación clara y precisa de las variaciones espaciales y de magnitud.

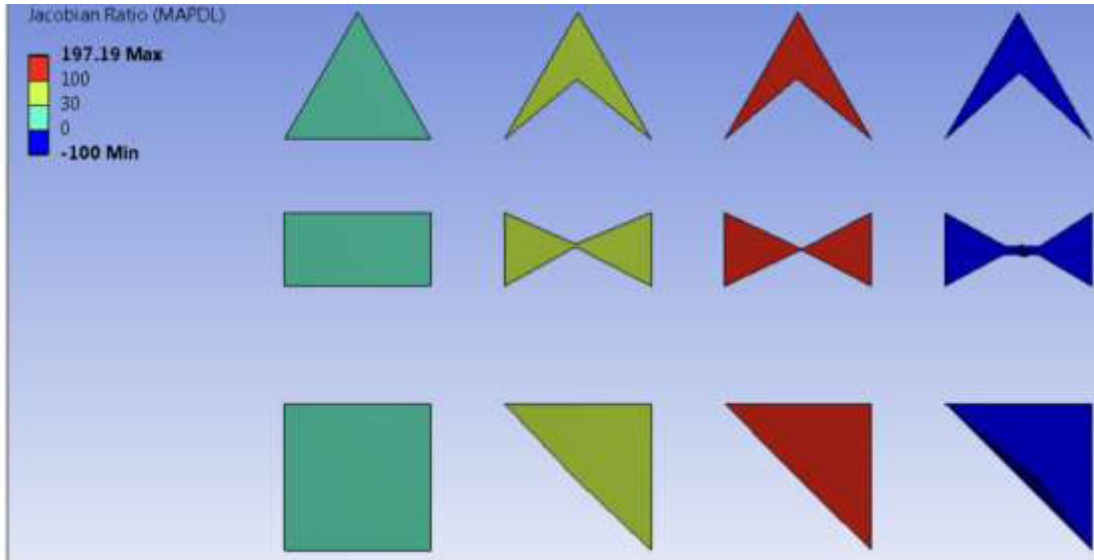


Figura 2.15. Rango de valores utilizando métrica de mallado “MAPDL” [32].

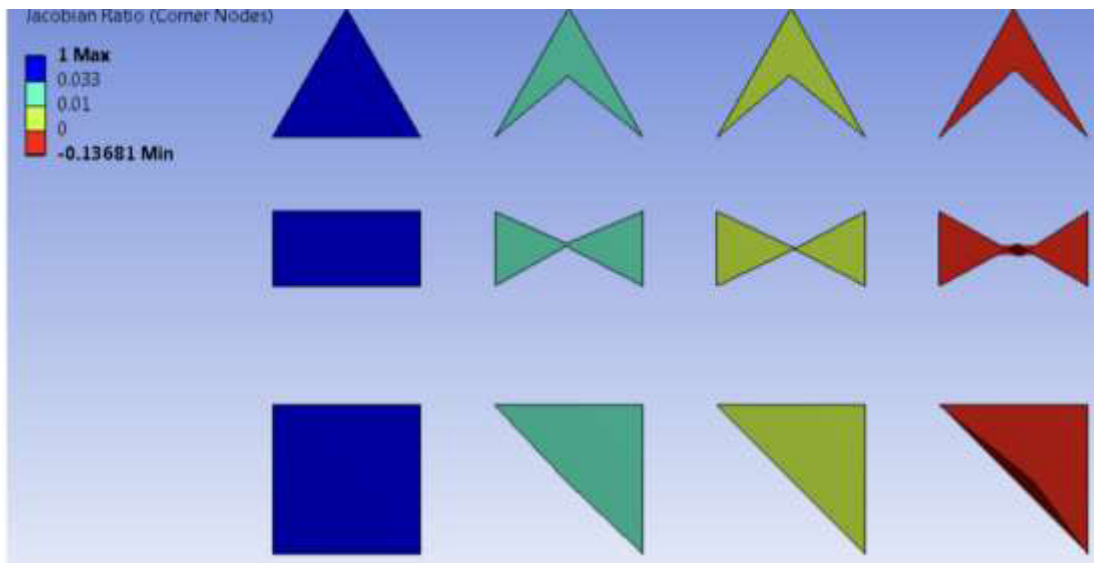


Figura 2.16. Rango de valores utilizando métrica de mallado “nodos de esquina (Puntos Nodales)” [32].

Utilizar la razón Jacobiana (Puntos de Gauss) es un buen indicador de la calidad para tetraedros cuadráticos porque su formulación es similar a la utilizada en el solucionador. Sin embargo, no es muy útil para mallados tipo Shell. Para este tipo de mallado, la calidad de elemento es mejor indicador de la calidad de malla. Por ejemplo, los elementos en 2D que registran una mala calidad

de las figuras anteriores, no necesariamente tendrán malos elementos con la razón Jacobiana (Puntos de Gauss), como se muestra en la Figura 2.17.

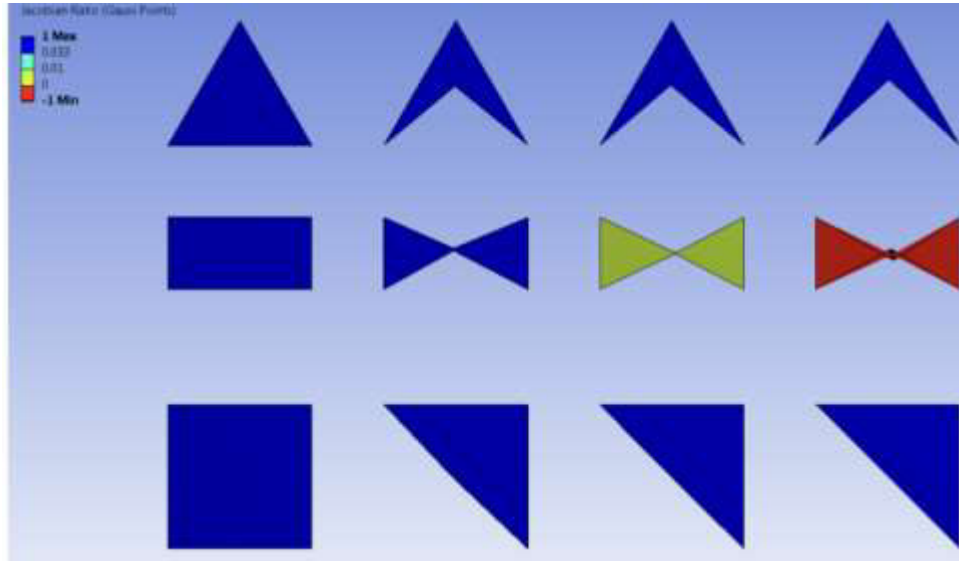


Figura 2.17. Rango de valores utilizando métrica de mallado “Puntos de Gauss” [32].

2.4.2. Límites de advertencia y error

Durante la generación del mallado, se calcula la calidad del elemento, también denominada forma del elemento. El algoritmo de mallado utiliza límites de error para obtener un mallado válido y realiza una limpieza adicional para asegurar que se cumplan estos límites de error. Un mallado válido es aquel que satisface las condiciones necesarias mínimas y que puede ser procesado por el solucionador. Posteriormente, el algoritmo de mallado intenta mejorar la calidad basándose en los límites de advertencia, también conocidos como límites objetivos.

Estos límites pueden definirse de la siguiente manera [33]:

- **Límite de error:** Es el valor en el cual la calidad de un elemento no es deseable para ser utilizada en el solucionador. Por defecto, una malla que contenga elementos por debajo de este límite fallará. Se da prioridad a asegurar que no existan elementos que infrinjan los límites de error.

- **Límite de advertencia:** Este tiene dos propósitos fundamentales:
 1. *Advertencia de calidad dudosa:* Cuando se utiliza un límite de advertencia, significa que el mallado contiene elementos cuya calidad es dudosa para su uso con el solucionador. Estos elementos pueden ser señalados mediante una advertencia.
 2. *Límite objetivo:* Cuando se emplea un límite objetivo, los métodos de mallado primero intentan mejorar la malla para asegurar que no existen elementos infrinjan los límites de error. Si esto se logra, los métodos de mallado realizan mejoras adicionales para intentar acercarse a los límites objetivos. Los límites objetivos representan los estándares de calidad deseados para el mallado. Si el mallado no puede alcanzar los estándares, se emite una advertencia.

Todos los métodos de mallado utilizan los límites de advertencia (límites objetivo) para catalogar los elementos. Sin embargo, no todos los métodos utilizan los límites objetivo para mejorar el mallado; solamente el método parche para ajustar un mallado tetraédrico (*Patch Conforming Tetra Mesh*) utiliza los límites objetivo para mejorar la malla.

Los límites de error para algunas preferencias físicas del sistema son los siguientes [33]:

- **Mechanical:** Utiliza cualquiera de las configuraciones mencionadas anteriormente, dependiendo de alguna de las siguientes opciones:
 1. *Standard Mechanical:* Estos límites de error resultan efectivos para problemas lineales, nodales, de esfuerzo o térmicos.
 2. *Aggressive Mechanical:* Estos límites de error son más restrictivos. Esta opción produce más elementos, falla con mayor frecuencia y toma más tiempo en realizar el mallado.
- **Nonlinear Mechanical:** Utiliza límites de error para producir una malla de alta calidad que cumpla con los requisitos de forma de elementos tetraédricos para análisis no lineal. Si la calidad del elemento no logra pasar los límites de error, el mallado no es adecuado para este tipo de análisis.

Existen otras preferencias físicas del sistema, como electromagnéticas, CFD y explícito. Sin embargo, dado que no son de interés en este caso de estudio, no se profundizará en detalle sobre ellas. La Tabla 2 muestra los límites de error y límites de advertencia para las diferentes opciones que se tomarán en cuenta. Se puede observar que, para las opciones de calidad en este estudio, solamente la razón Jacobiana en puntos de Gauss y en puntos nodales serán los que requieran de un valor mínimo para llegar al fallo en la malla según los criterios de *Standard Mechanical* y *Aggressive Mechanical*, respectivamente.

Tabla 2. Criterios de la preferencia física del sistema en cuanto al límite de error y advertencia [33].

Preferencia física	Mechanical		
	Límite de error para <i>Standard Mechanical</i>	Límite de error para <i>Aggressive Mechanical</i>	Límite de Advertencia (Límite Objetivo)
Razón Jacobiana (Puntos de Gauss)	<0.0025	N/A	N/A
Razón Jacobiana (Puntos Nodales)	N/A	<0.0025	N/A
<i>Skewness</i>	N/A	N/A	N/A
Ortogonalidad	N/A	N/A	N/A
Razón de Aspecto (Triángulos y Cuadriláteros)	N/A	N/A	N/A

Todos los elementos continuos, tanto bidimensionales (2D) como tridimensionales (sólidos 3D y shells 3D), son evaluados para asegurar que tengan una forma aceptable. Estas evaluaciones se realizan mediante cálculos de parámetros de forma, como el caso de la razón Jacobiana, que son funciones que dependen de la geometría del elemento. Estos parámetros luego se comparan con los límites de forma predeterminados, cuyos valores varían según las funciones del tipo de elemento. Para contextualizar esta evaluación, es necesario describir los elementos hexaédricos y tetraédricos.

Un elemento hexaédrico (o *Brick*) se caracteriza por tener seis caras cuadrilaterales y tres secciones transversales cuadriláteras (Figura 2.18). Estas secciones transversales están conectadas a los nodos intermedios o a los puntos medios del borde, en caso de que no se definan nodos intermedios [13].

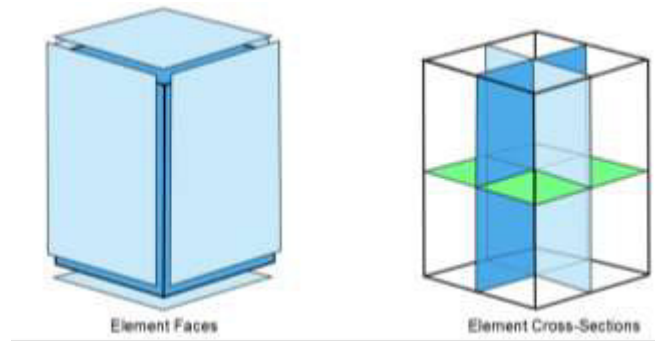


Figura 2.18. Elemento Brick [13].

Un elemento tetraédrico se caracteriza por tener cuatro caras triangulares y seis secciones transversales triangulares (Figura 2.19). Cada sección transversal incluye un borde y el punto más cercano a la línea contiene el borde opuesto. En la Figura 2.19, se pueden observar dos de estas secciones transversales en la parte derecha.

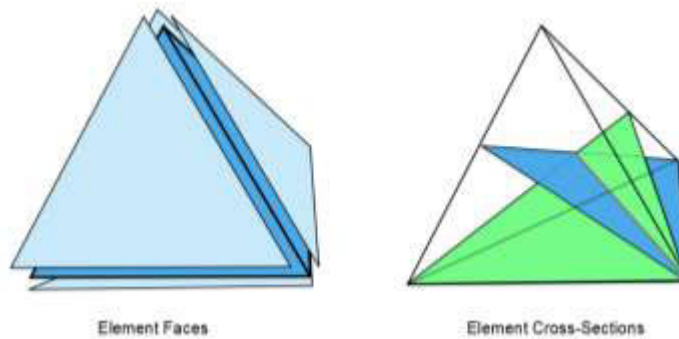


Figura 2.19. Elemento tetraédrico [13].

Los lugares de muestreo para tetraedros con nodos intermedios dependen de la configuración del esfuerzo lineal en el comando SHPP. El comportamiento predeterminado, cuando dicho comando se encuentra desactivado, establece el muestreo en los puntos nodales (SHPP,LSTET,OFF). Por otro lado, al encender el comando, el muestreo se realiza en los puntos de integración (SHPP,LSTET,ON) [13].

Realizar el muestreo en los puntos de integración resulta en un valor de la razón Jacobiana menor comparado con el muestro en los nodos, pero esta razón se compara con límites predeterminados más restrictivos. En la Tabla 3 se muestra el valor del límite correspondiente, dependiendo de la configuración del comando.

Tabla 3. Límites de advertencia y error de la razón Jacobiana [13].

Tipo de límite	Valor predeterminado	Razón por la cual es valor es apretado	Razón por la cual el valor es holgado
Advertencia para n-elementos	30 (SHPP,LSTET,OFF)	Una razón así de elevada indica que el trazado entre el elemento y el espacio real se está convirtiendo en un cálculo computacional no confiable.	Perturbación por distorsión en los resultados del análisis no han sido comprobados. Es complicado evitar advertencias aún con un límite de 30.
	10 (SHPP,LSTET,ON)		
Error para n-elementos	1000 (SHPP,LSTET,OFF)	Aumentar el límite no parece prudente.	Análisis válido no debería ser bloqueado.
	40 (SHPP,LSTET,ON)		

No obstante, algunos elementos que cumplen con la configuración activada fallan cuando la configuración se encuentra desactivada (especialmente aquellos que tienen un valor de $R_j=0$ en un nodo de esquina). Las pruebas demuestran que estos elementos no tienen efectos negativos en la veracidad del esfuerzo elástico-lineal. Sin embargo, su efecto en otros tipos de soluciones no ha sido estudiado, por lo cual se recomienda utilizar pruebas más conservadoras para un uso general.

Los elementos *Brick* (como el SOLID186) deformados hacia tetraedros son evaluados de la misma manera que si fuese un “nativo” tetraedro (SOLID187). En muchos casos, estos producen resultados conservadores. Sin embargo, para los elementos SOLID185 y SOLID186, al utilizar la configuración tetraédrica no recomendada, es posible que dichos elementos deformados generen un error durante la solución, incluso cuando no producen advertencias durante la prueba de forma [13].

Los elementos cuadriláteros y hexaedros son más adecuados para geometrías regulares y, en tales casos, son preferidos sobre los elementos triangulares y tetraédricos. Esto se debe a que los elementos cuadriláteros y hexaedros son más eficientes y requieren menos nodos, lo que simplifica el mallado y reduce el tiempo de cálculo. En particular, estos elementos ofrecen mejores resultados en términos de precisión y estabilidad, lo que los convierte en la opción ideal para modelos con geometrías que permiten una malla estructurada y regular.

2.4.3. Lugares de puntos de integración

Mechanical APDL utiliza fórmulas de integración numérica estándar y no estándar. El esquema de integración particular empleado para cada matriz o vector de carga se especifica para cada tipo de elemento. La ecuación general utilizada es la siguiente, que para algunas integraciones de regiones multidimensionales simplemente se expande [34].

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^l H_i f(x_i)$$

Donde:

$f(x)$ = función a ser integrada

H_i = factor de peso

x_i = lugar para evaluar la función (estos son usualmente las coordenadas s, t, r)

l = número de puntos de integración de Gauss

a) Cuadriláteros (2x2 puntos o 3x3 puntos)

La integración numérica para cuadriláteros en 2D es la siguiente:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l H_j H_i f(x_i, y_j)$$

Los lugares y los factores de peso pueden calcularse utilizando dos veces la Tabla 4.

Tabla 4. Constantes de la integración numérica de Gauss [34].

Número de puntos de integración	Lugares del punto de integración (x_i)	Factores de peso (H_i)
1	0	2
2	± 0.577350269189626	1
3	± 0.774596669241483	0.555555555555556
	0	0.888888888888889

Los lugares de los puntos de integración se muestran en la Figura 2.20.

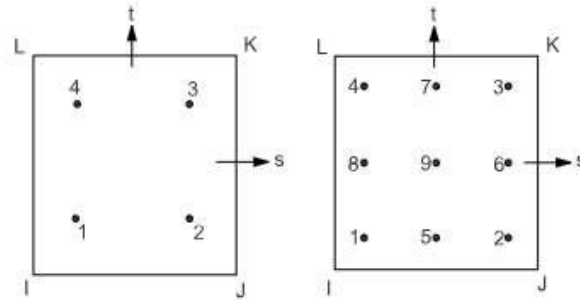


Figura 2.20 Lugares de puntos de integración para cuadriláteros [34].

Modelos que tienen un elemento con nodos intermedios (como es el caso del PLANE183) usando un mallado 2x2 de puntos de integración se ha observado que generan modos falsos de cero energía (efecto conocido como *hourglass*).

b) Bricks y pirámides (puntos 2x2x2)

En este caso, la ecuación de integración resulta de la siguiente manera:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y, z) dx dy dz = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l H_k H_j H_i f(x_i, y_j, z_k)$$

Los lugares y los factores de peso pueden ser calculados utilizando la Tabla 4 tres veces y los lugares de integración se muestran en la Figura 2.21.

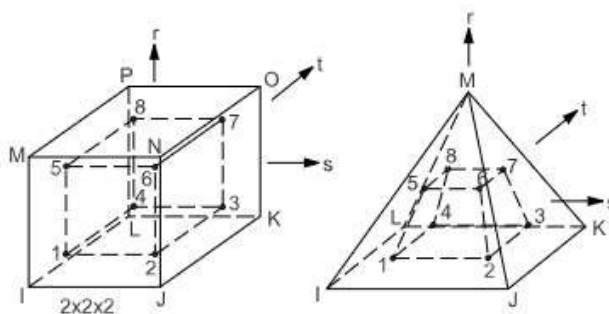


Figura 2.21. Lugares de puntos de integración para elementos *Bricks* y *Pirámides* [34].

Nuevamente, los modelos con un elemento que tiene nodos intermedios utilizando puntos de integración para un mallado 2x2x2, se ha observado que generan modos falsos de cero energía (*hourglass*).

c) Triángulos (1, 3, o 6 puntos) y Tetraedros (1, 4, 5, u 11 puntos)

Los puntos de integración para los triángulos y tetraedros se encuentran en las tablas 5 y 6, respectivamente, y se ilustran en las Figuras 2.22 y 2.23. La constante L varía desde 0 en un borde hasta 1 en el vértice opuesto.

Tabla 5. Integración numérica para triángulos [34].

Tipo	Lugar de punto de integración	Factor de peso
Regla de 1 punto	$L_1 = L_2 = L_3 = 0.3333333$	1
Regla de 3 puntos	$L_1 = 0.6666666666666666$	0.3333333333333333
	$L_2 = L_3 = 0.1666666666666666$ Intercambiar L_1, L_2, L_3 para otros lugares.	
Regla de 6 puntos	Puntos en las esquinas $L_1 = 0.816847572980459$ $L_2 = L_3 = 0.091576213509661$ Intercambiar L_1, L_2, L_3 para otros lugares.	0.109951743655322
	Puntos centrales en el borde $L_1 = 0.10810301816807$ $L_2 = L_3 = 0.445948490915965$ Intercambiar L_1, L_2, L_3 para otros lugares.	0.223381589678011

Tabla 6. Integración numérica para tetraedros [34].

Tipo	Lugar de punto de integración	Factor de peso
Regla de 1 punto	Punto central $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0.25$	1
Regla de 4 puntos	Puntos en las esquinas $L_1 = 0.585410196624968$ $L_2 = L_3 = L_4 = 0.138196601125010$ Intercambiar L_1, L_2, L_3 y L_4 para otros lugares.	0.25
	Punto central $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0.25$	-0.8
Regla de 5 puntos	Puntos en las esquinas $L_1 = 0.5$ $L_2 = L_3 = L_4 = 0.1666666666666666$ Intercambiar L_1, L_2, L_3 y L_4 para otros lugares.	0.45
	Punto central $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0.25$	-0.0131555555555556
Regla 11 puntos	Puntos en las esquinas $L_1 = L_2 = L_3 = 0.714285714285714$ $L_4 = 0.785714285714286$ Intercambiar L_1, L_2, L_3 y L_4 para otros lugares.	0.0076222222222222
	Puntos centrales del borde $L_1 = L_2 = 0.399403576166799$ $L_3 = L_4 = 0.100596423833201$ Intercambiar L_1, L_2, L_3 y L_4 tal que dos de L_1, L_2, L_3 y L_4 sean igual a 0.399403576166799 y los otros dos sean igual a 0.100596423833201 para los otros 5 lugares.	0.0248888888888888

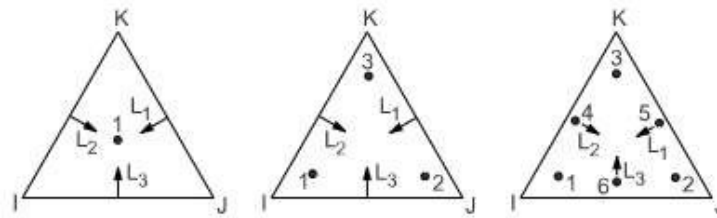


Figura 2.22. Lugares de los puntos integración para triángulos [34].

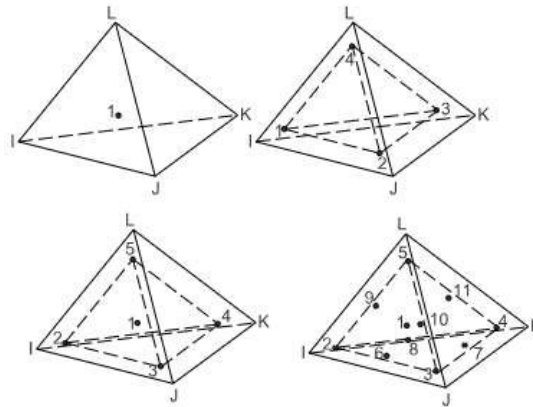


Figura 2.23. Lugares de punto de integración para un tetraedro [34].

d) Triángulos y tetraedros (2x2 puntos o 2x2x2 puntos)

Estos elementos utilizan el mismo esquema de punto de integración que se mostró para cuadriláteros de 4 nodos y sólidos de 8 nodos. Sus ubicaciones y factores de peso pueden calcularse con las constantes de la Tabla 4 dos y tres veces, respectivamente. En la Figura 2.24 se presentan los puntos de integración para ambos tipos de elementos. Los casos de 3x3 o 3x3x3 se manejan de manera similar [34].

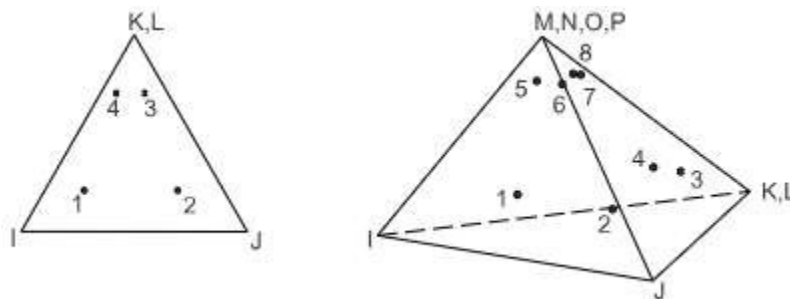


Figura 2.24. Lugares de puntos de integración para triángulos y tetraedros [34].

2.4.4. Evaluación de datos nodales y centroides.

Los elementos de área y volumen generalmente calculan resultados con mayor precisión y confiabilidad en los puntos de integración. Los lugares de estos datos, que incluyen esfuerzos estructurales, deformaciones elásticas y térmicas, gradientes de campo, y flujos, pueden ser trasladados a lugares nodales o centroides para su análisis posterior [35]. Este proceso se realiza mediante extrapolaciones o interpolaciones, basadas en las funciones de forma del elemento o funciones de forma simplificadas que se encuentran en la Tabla 7.

Tabla 7. Coeficientes de las funciones de forma para distintas geometrías [35].

Geometría	Número de puntos de integración	Variación de los datos asumidos
Triángulos	3	$a+bs+ct$
Cuadriláteros	4	$a+bs+ct+dst$
Tetraedros	4	$a+bs+ct+dr$
Hexaedros	8	$a+bs+ct+dr+est+ftr+gsr+hstr$

Donde a, b, c, d, e, f, g, h son coeficientes y s, t, r son coordenadas naturales del elemento.

Se puede realizar la extrapolación o simplemente se pueden trasladar los resultados de los puntos de integración hacia los nodos. Sin embargo, si existen no linealidades en el material de un elemento, el ajuste de mínimos cuadrados puede causar imprecisiones en los datos nodales extrapolados o en los datos centroidales interpolados. Estas imprecisiones suelen ser menores para la plasticidad, *creep*, o inflamaciones (cambios volumétricos de un material debido a factores como, por ejemplo, cambios de temperatura), pero son más evidentes en elementos donde un punto de integración pueda cambiar de estado [35].

Los elementos pueden ser lineales (elementos de primer orden) o cuadráticos (elementos de segundo orden) como se puede observar en la Figura 2.25.

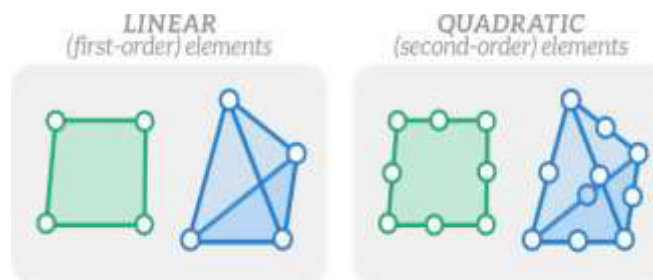


Figura 2.25. Elementos lineales y cuadráticos [24].

Elementos cuadráticos tienen un nodo adicional intermedio a lo largo de cada borde del elemento. Estos requieren más poder computacional pero generalmente producen resultados más precisos que los elementos lineales.

Los elementos lineales tetraédricos (elementos tetraédricos de 4 nodos) son conocidos por exhibir un comportamiento demasiado rígido, por lo que su uso debería ser evitado siempre que sea posible. En su lugar, se recomienda utilizar elementos tetraédricos cuadráticos, que ofrecen una mejor representación del comportamiento estructural y son menos propensos a presentar demasiada rigidez. Estos elementos cuadráticos proporcionan una mayor precisión y estabilidad en las simulaciones, mejorando significativamente la calidad del análisis [24].

Los tipos de elemento que se estudiarán serán PLANE182, PLANE183, SOLID185 y SOLID186. Al utilizar un tipo de elemento, se presentan tres configuraciones diferentes. La primera (KEYOPT(1)=0) indica que el elemento utiliza el método \bar{B} , que es una técnica de integración de selección reducida para términos volumétricos. La segunda opción (KEYOPT(1)=1), es la técnica de integración reducida uniforme. La tercera opción (KEYOPT(1)=2 o 3), son las formulaciones de deformación mejorada, Para la configuración 2 introduce 5 grados de libertad internos para prevenir el bloqueo volumétrico y por cortante, mientras que para la configuración 3 se introducen 4 grados de libertad internos para prevenir el bloqueo únicamente por cortante [36].

a) PLANE 182-2D 4-NODE STRUCTURAL SOLID

Este tipo de elemento puede ser utilizado tanto como un elemento plano, para casos de esfuerzo plano, deformación plana o deformación plana generalizada, así como también como un elemento axisimétrico, ya sea con o sin torsión. Se define por cuatro nodos (Figura 2.26), cada uno con dos grados de libertad (traslación en las direcciones nodales x e y). Sin embargo, en el caso de la axisimetría con torsión, cada nodo cuenta con tres grados de libertad. Este elemento es capaz de modelar plasticidad, hiperelasticidad, endurecimiento por esfuerzo, grandes deformaciones y grandes deflexiones [36].

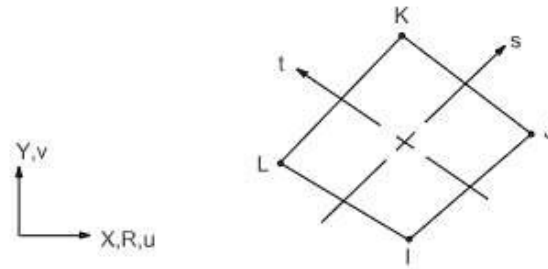


Figura 2.26. Geometría PLANE 182 (cuadrilátero) [36].

Las funciones de forma que tiene este tipo de elemento cuando son cuadriláteros y triángulos son las siguientes [37]:

➤ Cuadriláteros

$$u = \frac{1}{4}(u_i(1-s)(1-t) + u_j(1+s)(1-t) + u_k(1+s)(1+t) + u_l(1-s)(1+t))$$

$$v = \frac{1}{4}(v_i(1-s)(1-t) + v_j(1+s)(1-t) + v_k(1+s)(1+t) + v_l(1-s)(1+t))$$

➤ Triángulos

$$u = u_iL_1 + u_jL_2 + u_kL_3$$

$$v = v_iL_1 + v_jL_2 + v_kL_3$$

Los puntos de integración que utilizan cada una de estas ecuaciones dependen de la configuración asignada. En el caso de los cuadriláteros, cuando se considera la opción KEYOPT(1)=1, solo se utiliza 1 punto de integración. Sin embargo, al seleccionar la opción KEYOPT(1)=0, 2, o 3, los puntos de integración son los mostrados en la Figura 2.20, que consiste en una malla de 2x2.

Por otro lado, para los triángulos (selección no recomendada), independientemente de la configuración seleccionada, solo se utiliza un punto de integración.

b) PLANE183 – 2D 8-NODE STRUCTURAL SOLID

Este tipo de elemento (Figura 2.27) se presenta como un elemento de 8 nodos (o 6 nodos) de alto orden en 2D. Su comportamiento de desplazamiento cuadrático lo hace ideal para modelar mallas irregulares. Se puede emplear en los mismos casos que el PLANE182, manteniendo las mismas características, pero con la diferencia de que cuenta con un nodo intermedio en cada borde, lo que añade grados de libertad adicionales a la estructura del elemento [38].

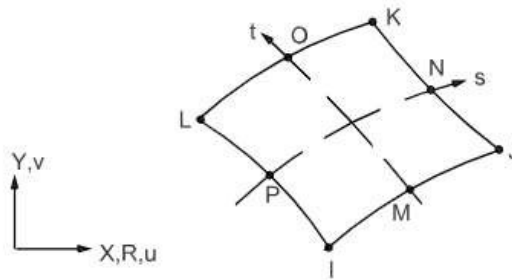


Figura 2.27. Geometría PLANE 183 (cuadrilátero) [38].

Sus respectivas funciones de forma para cuadriláteros y triángulos son las siguientes [37]:

➤ Cuadriláteros

$$u = \frac{1}{4} \left(u_i(1-s)(1-t)(-s-t-1) + u_j(1+s)(1-t)(-s-t-1) + u_k(1+s)(1+t)(s+t-1) \right. \\ \left. + u_l(1-s)(1+t)(-s+t-1) \right) + \frac{1}{2} \left(u_M(1-s^2)(1-t) + u_N(1+s)(1-t^2) \right. \\ \left. + u_O(1-s^2)(1+t) + u_P(1-s)(1-t^2) \right)$$

$$v = \frac{1}{4} \left(v_i(1-s)(1-t)(-s-t-1) + v_j(1+s)(1-t)(-s-t-1) + v_k(1+s)(1+t)(s+t-1) \right. \\ \left. + v_l(1-s)(1+t)(-s+t-1) \right) + \frac{1}{2} \left(v_M(1-s^2)(1-t) + v_N(1+s)(1-t^2) \right. \\ \left. + v_O(1-s^2)(1+t) + v_P(1-s)(1-t^2) \right)$$

➤ Triángulos

$$u = u_i(2L_1 - 1)L_1 + u_j(2L_2 - 1)L_2 + u_k(2L_3 - 1) + u_L(4L_1L_2) + u_M(4L_2L_3) + u_N(4L_3L_1)$$

$$v = v_i(2L_1 - 1)L_1 + v_j(2L_2 - 1)L_2 + v_k(2L_3 - 1) + v_L(4L_1L_2) + v_M(4L_2L_3) + v_N(4L_3L_1)$$

Los puntos de integración para los cuadriláteros son de la configuración 2x2, mientras que los triángulos tienen 3 puntos de integración.

c) SOLID185 3D 8-NODE STRUCTURAL SOLID

Este tipo de elemento es empleado para modelar estructuras sólidas en 3D. Está definido por 8 nodos, con tres grados de libertad en cada nodo (traslación nodal en las direcciones x, y, z). Posee las mismas características que los elementos PLANE182 y PLANE183.

Este tipo de elemento se encuentra disponible en dos formatos:

- *Sólido Estructural Estándar Homogéneo sin capas (KEYOPT(3)=0, asignado predeterminadamente)*

Este formato permite utilizar degeneraciones prismáticas, tetraédricas y piramidales en regiones irregulares (Figura 2.28).

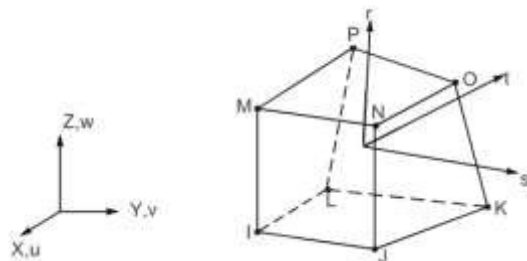


Figura 2.28. Geometría SOLID 185 (Hexaedro) [39].

Este formato presenta puntos de integración en una malla de 2x2x2 (Figura 2.21) al seleccionar la técnica de integración \bar{B} , así como las formulaciones de deformación mejorada con 13 grados de libertad internos y con 9 grados de libertad internos. Cuando se selecciona la técnica de integración uniforme reducida, solamente se tiene 1 punto de integración. De igual manera, al utilizar tetraedros, también se cuenta con 1 punto de integración [39].

Las funciones de forma quedan definidas de la siguiente manera [40]:

$$u = \frac{1}{8} \left(u_i(1-s)(1-t)(1-r) + u_j(1+s)(1-t)(1-r) + u_k(1+s)(1+t)(1-r) \right. \\ \left. + u_L(1-s)(1+t)(1-r) \right) + u_M(1-s)(1-t)(1+r) + u_N(1+s)(1-t)(1+r) \\ + u_O(1+s)(1+t)(1+r) + u_P(1-s)(1+t)(1+r)$$

$$v = \frac{1}{8} \left(v_i(1-s)(1-t)(1-r) + v_j(1+s)(1-t)(1-r) + v_k(1+s)(1+t)(1-r) \right. \\ \left. + v_L(1-s)(1+t)(1-r) \right) + v_M(1-s)(1-t)(1+r) + v_N(1+s)(1-t)(1+r) \\ + v_O(1+s)(1+t)(1+r) + v_P(1-s)(1+t)(1+r)$$

$$w = \frac{1}{8} \left(w_i(1-s)(1-t)(1-r) + w_j(1+s)(1-t)(1-r) + w_k(1+s)(1+t)(1-r) \right. \\ \left. + w_L(1-s)(1+t)(1-r) \right) + w_M(1-s)(1-t)(1+r) + w_N(1+s)(1-t)(1+r) \\ + w_O(1+s)(1+t)(1+r) + w_P(1-s)(1+t)(1+r)$$

➤ **Sólido Estructural con capas (KEYOPT(3)=1)**

Este formato se emplea para modelar *shells* gruesos o sólidos con capas, como se ilustra en la Figura 2.29.

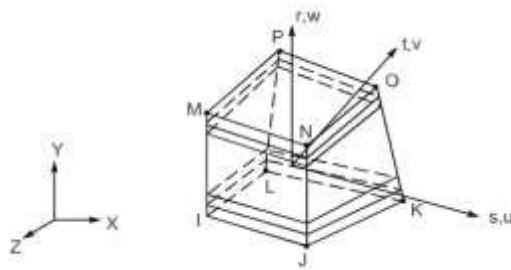


Figura 2.29. Geometría SOLID 185 con capas (Hexaedro) [39].

Las funciones de forma son idénticas a las del formato anterior. Sin embargo, los puntos de integración varían según la geometría del elemento. Para elementos en el plano, se utilizan los puntos de integración dispuestos en una malla de 2x2. En el caso de elementos sólidos, a través

del grosor del elemento, se emplean 2 puntos de integración. En cuanto a los elementos tipo *Shell*, se utilizan 1, 3, 5, 7 o 9 puntos de integración por capa, dependiendo de la sección *Shell* definida.

d) SOLID186 – 3D 20-NODE STRUCTURAL SOLID

Este tipo de elemento comparte las mismas características que el elemento SOLID185 en ambos formatos; sin embargo, se distingue por la presencia de un nodo intermedio en cada borde, lo que resulta en un mayor número de nodos y una mayor estabilidad en la solución de ecuaciones. Otra diferencia radica en la tecnología del elemento, que solo cuenta con la integración uniforme reducida (predeterminada) y la integración completa [41].

Al igual que el elemento SOLID185, este tipo de elemento ofrece configuraciones tanto con capas como sin capas. No obstante, las funciones de forma y las características permanecen inalteradas, con la única variación en los puntos de integración. Las funciones de forma para hexaedros (Figura 2.30), pirámides (Figura 2.31) y tetraedros (Figura 2.32) son las siguientes [40]:

➤ Hexaedros:

$$\begin{aligned}
 u = \frac{1}{8} & \left(u_i(1-s)(1-t)(1-r)(-s-t-r-2) + u_j(1+s)(1-t)(1-r)(-s-t-r-2) \right. \\
 & + u_k(1+s)(1+t)(1-r)(s+t-r-2) + u_l(1-s)(1+t)(1-r) \left. \right) (s+t-r-2) \\
 & + u_m(1-s)(1-t)(1+r)(-s-t+r-2) \\
 & + u_n(1+s)(1-t)(1+r)(s-t+r-2) + u_o(1+s)(1+t)(1+r)(s+t+r-2) \\
 & + u_p(1-s)(1+t)(1+r)(-s+t+r-2) + \frac{1}{4}(U_Q(1-s^2)(1-t)(1-r) \\
 & + u_R(1+s)(1-t^2)(1-r) + u_S(1-s^2)(1+t)(1-r) + u_T(1-s)(1-t^2)(1-r) \\
 & + u_U(1-s^2)(1-t)(1+r) + u_V(1+s)(1-t^2)(1+r) + u_W(1-s^2)(1+t)(1+r) \\
 & + u_X(1-s)(1-t^2)(1+r) + u_Y(1-s)(1-t)(1-r^2) + u_Z(1+s)(1-t)(1-r^2) \\
 & + u_A(1+s)(1+t)(1-r^2) + u_B(1-s)(1+t)(1-r^2))
 \end{aligned}$$

Para v y w se usa la misma ecuación, solamente se ajusta la variable correspondiente.

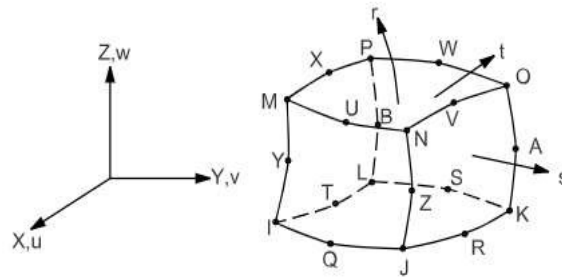


Figura 2.30. Geometría SOLID 186 (Hexaedro) [41].

En el caso cuando el tipo de elemento no tiene capas, cuando la tecnología del elemento se encuentra en integración completa, cuenta con 14 puntos de integración. Por otro lado, cuando se utiliza la integración uniforme reducida, los puntos de integración se convierten en una malla de 2x2x2.

Cuando el elemento tiene capas, los puntos de integración son semejantes a los establecidos en el elemento SOLID185 (con capas).

➤ Pirámide:

$$\begin{aligned}
 u = \frac{q}{4} & \left(u_i(1-s)(1-t)(-1-qs-qt) + u_j(1+s)(1-t)(-1+qs-qt) \right. \\
 & + u_k(1+s)(1+t)(-1+sq+qt) + u_l(1-s)(1+t)(-1-qs+qt) \\
 & + u_m(1-q)(1-2q) \\
 & + \frac{q^2}{2} \left(u_q(1-t)(1-s^2) + u_r(1+s)(1-t^2) + u_s(1+t)(1-s^2) \right. \\
 & \left. + u_t(1-s)(1-t^2) \right) + q(1-q) \left(u_y(1-s-t+st) + u_z(1+s-t-st) \right) + u_a \left(1 \right. \\
 & \left. + s+t+st) + u_b(1-s+t-st) \right)
 \end{aligned}$$

Para v y w se utiliza la misma ecuación, ajustando únicamente la variable correspondiente. Además, este tipo de elemento solamente es permisible cuando el elemento no tiene capas, es decir, se utiliza la configuración predeterminada [40].

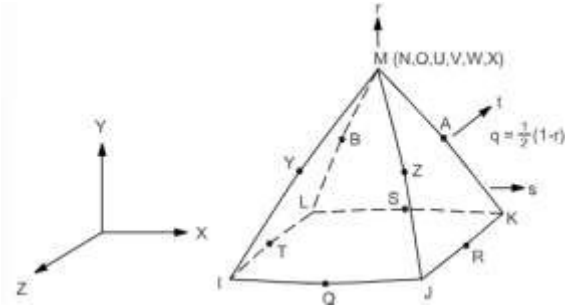


Figura 2.31. Geometría SOLID 186(Pirámide) [41].

Los puntos de integración que tiene son de 2x2x2 en cualquier tecnología del elemento.

➤ Tetraedro:

$$u = u_i(2L_1 - 1)L_1 + u_j(2L_2 - 1)L_2 + u_k(2L_3 - 1)L_3 + u_l(2L_4 - 1)L_4 + 4u_mL_1L_2 + 4u_nL_2L_3 + 4u_oL_1L_3 + 4u_pL_1L_4 + 4u_qL_2L_4 + 4u_rL_3L_4$$

Para v y w se usa la misma ecuación, únicamente ajustando la variable correspondiente. Al igual que con la geometría piramidal, esta geometría solamente es permisible con la configuración predeterminada (sin capas) [41]. Esta geometría cuenta con 4 puntos de integración [40].

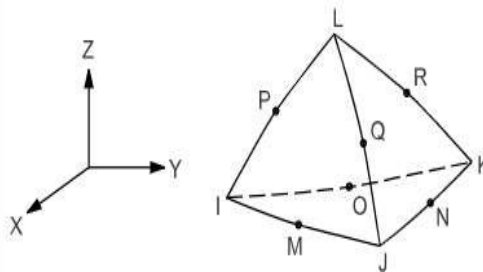


Figura 2.32. Geometría SOLID 186 (Tetraedro) [41].

2.5. Diseño de Experimentos

Un efecto en el contexto de un diseño experimental describe el tamaño y la dirección de la relación entre un término (ya sea un factor o una interacción de factores) y la variable de respuesta. El efecto de un factor representa el cambio pronosticado en la respuesta media cuando el factor cambia de su nivel bajo a su nivel alto [42].

La interpretación de los efectos se complica a medida que aumentan las interacciones entre los factores. Mientras más factores estén involucrados en una interacción, más difícil es interpretar el efecto de dicha interacción. Las interacciones ocurren cuando el efecto de un factor depende del nivel de otro factor, lo que añade una capa de complejidad en la comprensión de cómo los factores influyen conjuntamente en la variable de respuesta.

El tamaño del efecto es una medida que evalúa la significancia práctica del impacto que un término tiene en la variable de respuesta. Generalmente, un efecto grande sugiere una influencia considerable del término sobre la variable de respuesta, mientras que un efecto pequeño indica una influencia menor. Sin embargo, el tamaño del efecto por sí solo no es suficiente para determinar la relevancia de un término en un modelo experimental [42].

Para determinar si un término es estadísticamente significativo, es necesario considerar la variación en los datos de respuesta. El tamaño del efecto proporciona información sobre la variabilidad inherente a los datos; por lo tanto, para evaluar la significancia estadística, se debe examinar el valor p del término.

El valor p es una medida estadística que indica la probabilidad de obtener un efecto al menos tan extremo como el observado, bajo la suposición de que el término no tiene un efecto real (hipótesis nula) [43].

Si $p \leq \alpha$ ($\alpha =$ nivel de significancia), se rechaza la hipótesis nula, concluyendo que el coeficiente es estadísticamente significativo, implicando que hay una asociación entre el término y la variable de respuesta; en caso contrario, no se rechaza la hipótesis nula concluyendo que no existe una asociación estadísticamente significativa entre la variable de respuesta y el término [42].

El nivel de significancia, comúnmente denotado como α , es un umbral predefinido (en muchas ocasiones con un valor de 0.05) [43], [44] que indica la probabilidad máxima tolerada de cometer un error (rechazar una hipótesis nula verdadera).

El valor p es una probabilidad que mide la evidencia en contra de la hipótesis nula. Las probabilidades más bajas proporcionan una evidencia más fuerte en contra de la hipótesis nula. Para determinar si un coeficiente es estadísticamente diferente de 0, compare el valor p del término

con su nivel de significancia para evaluar la hipótesis nula. La hipótesis nula significa que el coeficiente es igual a 0, lo que implica que no hay asociación entre el término y la respuesta [43].

El coeficiente en un modelo experimental describe el tamaño y la dirección de la relación entre un término y la variable de respuesta. Este coeficiente representa un cambio en la respuesta media asociado con un aumento de una unidad codificada en ese término, manteniendo constantes los otros términos. El signo del coeficiente (positivo o negativo) indica la dirección de la relación, es decir, si el aumento en el término produce un aumento o una disminución en la variable de respuesta [42].

La interpretación de los coeficientes y el tamaño del efecto permite a los investigadores tomar decisiones informadas sobre la relevancia práctica y estadística de los términos en el modelo. En la práctica, los investigadores deben equilibrar entre la significancia práctica (tamaño del efecto) y la significancia estadística (valor p) para tomar decisiones sobre la inclusión o exclusión de términos en el modelo final.

El error estándar del coeficiente es una medida que estima la variabilidad entre las estimaciones del coeficiente que se obtendrían si se tomaran múltiples muestras de la misma población. Este cálculo asume que el diseño experimental y los coeficientes que se estimarán se mantendrán constantes en cada repetición del muestreo. Se utiliza el error estándar del coeficiente para medir la precisión de la estimación del coeficiente. En esencia, el error estándar del coeficiente se utiliza para medir la precisión de la estimación del coeficiente; cuanto menor sea el error estándar, más precisa será la estimación del coeficiente [43].

El error estándar se calcula considerando la variabilidad de los datos y la estructura del diseño experimental. Un error estándar pequeño indica que las estimaciones del coeficiente son consistentes y que cualquier variación observada es baja, lo cual sugiere una mayor confianza en la precisión de la estimación.

Para evaluar la significancia de un coeficiente, se puede calcular el valor t dividiendo el coeficiente estimado entre su error estándar. Este valor t sigue una distribución t -Student bajo la hipótesis nula, que postula que el coeficiente es igual a cero (es decir, que no hay efecto) [42].

El valor t se utiliza para determinar si se puede rechazar la hipótesis nula. Se compara el valor t con los valores críticos de la distribución t para un nivel de significancia dado y los grados de libertad del modelo. Sin embargo, en la práctica, el valor p asociado con el valor t se utiliza con mayor frecuencia para esta evaluación porque el valor umbral para el rechazo de la hipótesis nula no depende de los grados de libertad.

El Factor de Inflación de la Varianza (FIV) es una medida utilizada para evaluar la severidad de la multicolinealidad en un modelo de regresión. La multicolinealidad se refiere a la correlación entre los predictores incluidos en el modelo, y el FIV cuantifica cuánto se incrementa la varianza de un coeficiente debido a esta correlación [45]. Un FIV de 1 indica ausencia de multicolinealidad, lo que es ideal y simplifica la determinación de la significancia estadística de los coeficientes.

En muchos diseños factoriales [42], los valores de FIV son 1, indicando que los predictores no están correlacionados. Sin embargo, cuando los predictores están altamente correlacionados ($FIV > 10$), la multicolinealidad se convierte en un problema porque puede inflar la varianza de los coeficientes de regresión, haciendo que las estimaciones sean inestables y difíciles de interpretar.

El error estándar de la estimación, denotado como S , mide la dispersión de los valores de los datos alrededor de los valores ajustados por el modelo. Es esencialmente la desviación estándar de los residuos (errores de predicción). Un valor bajo de S indica que los puntos de datos están cerca de la línea de regresión ajustada, lo cual sugiere un buen ajuste del modelo. Sin embargo, un valor bajo de S no garantiza por sí solo que el modelo cumpla con todos los supuestos necesarios, por ello, es crucial examinar adicionalmente otros diagnósticos del modelo [46].

Un diseño factorial es un tipo de experimento diseñado que permite estudiar los efectos que varios factores pueden tener en una respuesta. Al realizar un experimento, variar los niveles de todos los factores al mismo tiempo en lugar de uno a la vez, permite estudiar las interacciones entre los factores [47], [48].

La selección del diseño de experimentos depende de varios aspectos, incluyendo el tipo de factores e interacciones que se estudiarán. Es crucial que el diseño elegido facilite la comprensión e implementación, adecuándose a las características específicas del estudio. Entre los diseños más comunes se encuentran [43], [47], [48]:

- Diseños Factoriales Fraccionados (2^{k-p}): Estos indican el nivel de confusiones en la estimación de efectos, proporcionando una idea de la precisión con la que se pueden estimar los efectos importantes. Es útil para reducir el número de corridas experimentales manteniendo la capacidad de estimar los efectos principales.
- Diseños Factoriales Completos a dos niveles (2^k): Estos investigan todas las posibles combinaciones de los niveles de los factores. Permiten estimar los efectos de todos los factores principales y sus interacciones.
- Plackett- Burman: Este es un caso especial dentro de los diseños factoriales que es utilizado para identificar los factores más importantes. Estos diseños son generalmente de resolución III, donde los efectos principales se confunden con interacciones de dos factores. Se deben usar cuando se presupone que estas interacciones son insignificantes. También, este tipo de diseño permite manejar una gran cantidad de factores con un número relativamente pequeño de corridas experimentales (el software Minitab genera diseños para un máximo de 47 factores), facilitando una evaluación efectiva de los efectos principales [49].

Debido a que se pueden estimar muchísimos experimentos al aumentar la cantidad de factores, no tiene un sentido práctico tener un orden elevado. Es necesario, por tanto, encontrar una estrategia que permita reducir significativamente el número de tratamientos experimentales sin comprometer la validez del estudio.

Por ejemplo, los diseños factoriales fraccionados investigan solo algunas de las combinaciones posibles de factores, representados como 2^{k-p} , donde p es el número de fracciones del diseño. Estos diseños se basan en dos principios fundamentales [48]:

1. Principio de Pareto: Este principio sugiere que, en un conjunto de factores, solo unos pocos son responsables de la mayor variabilidad en la respuesta. Así, incluyendo un número elevado de factores en el estudio, se puede identificar cuáles tienen el mayor impacto.
2. Jerarquización de Efectos: En la jerarquización, los efectos principales son más importantes que las interacciones dobles (interacciones entre dos factores), seguida por las interacciones triples, y así sucesivamente.

Un detalle para considerar es que, al reducir el número de experimentos mediante diseños fraccionados, se pierde información que puede ser relevante. No obstante, esta pérdida se puede considerar aceptable si se sacrifica información menos importante para obtener un diseño más manejable y eficiente. El objetivo es minimizar la pérdida de información crítica mientras se mantiene la capacidad de identificar los efectos más significativos.

Los diseños factoriales se categorizan por su nivel de resolución, lo cual indica la capacidad del diseño para estimar efectos sin confusión entre ellos [48]:

- Resolución V (2^{6-1}): En estos diseños, los efectos principales y las interacciones dobles se confunden entre sí, pero pueden estar confusos con interacciones de orden superior (triples o mayores), es decir, se confunden las interacciones dobles con las triples, y los efectos principales se confunden con interacciones de 4 variables, que raramente son de importancia.
- Resolución IV: Los efectos principales no se confunden entre ellos ni con sus interacciones dobles, pero las interacciones dobles pueden estar confusas entre sí. Incluso, los efectos principales podrían confundirse con interacciones triples.
- Resolución III: Los efectos principales no se confunden entre ellos, pero pueden estar confusos con interacciones dobles. Este tipo de diseño es útil cuando se presume que las interacciones dobles no son significantes (no es muy recomendable este tipo de resolución).

La implementación de estrategias como esos diseños factoriales permiten reducir de manera efectiva el número de experimentos necesarios, manteniendo la capacidad de identificar los factores más influyentes. Esto resulta en diseño experimentales más manejables y eficientes, optimizando el uso de recursos y tiempo.

Capítulo 3

Antecedentes

Un analista experimentado puede muy seguramente indicar cuánto error existe en una solución de análisis por elementos finitos (AEF). Se sabe que prácticamente toda solución de AEF es una aproximación, y los errores se pueden estimar en las aproximaciones.

Kuberappa et al. dicen que se debe considerar una aproximación balanceada teniendo en cuenta un número óptimo de elementos usados para conseguir resultados con buena precisión. Los errores debido a la discretización del mallado pueden ser encontrados al evaluar la calidad y adecuación de la malla. Para esto, existen cuatro métodos distintos para estimar el error con la discretización de malla, como lo son “Error de la Energía Estructural (SERR por sus siglas en inglés), Desviación del Esfuerzo del Elemento (SDSG), Porcentaje de Error con la Norma Energética (SEPC) y la Condición del Esfuerzo Máximo y Mínimo (SMXB/SMNB)” [50].

J. R. Cho muestra una técnica de refinamiento de cuadrícula con error conducido para un análisis de fractura confiable en 2D por un método de elemento natural Petrov-Galerkin enriquecido obteniendo una solución cuasi exacta para una estimación del error al mejorar la solución de aproximación simple del método natural utilizando el método enriquecido y la recuperación global. Esta estimación del error fue medida en términos de la norma energética [51].

Chandresh Shah indica que los errores pueden ser clasificados bajo las siguientes categorías: Error de usuario (uso incorrecto del software de EF o por entradas del analista de EF), errores debido a suposiciones y simplificaciones usadas en el modelo y errores debido a insuficiente discretización de malla [52].

En vez de buscar una aproximación de la operación de diferenciación, el MEF lleva a cabo un diferente enfoque para obtener las soluciones aproximadas. Primeramente, cada dominio geométrico físico necesita ser subdividido (discretizado) en piezas más pequeñas (subdominios) llamado elementos finitos [53].

Métodos son propuestos para estimar el error de discretización en la salida del sistema de las simulaciones. En tales sistemas, las ecuaciones gobernantes para cada disciplina son numéricamente solucionadas por un código computacional diferente, y cada disciplina tiene diferentes parámetros para el tamaño de mallado.

Sirisha et al. muestran dos aspectos del error de discretización, los cuales son de interés en análisis multidisciplinario: tamaños de mallado disciplinario y discordancia en el mallado disciplinario en la interfase en las cuales las condiciones de frontera son intercambiadas.

Dos representaciones alternativas para el error de discretización para los casos específicamente genéricos anteriores son: 1) ignorar la discordancia del mallado en la interfase y 2) considerar el mallado discordante en la interfase.

Ellos utilizaron modelos polinomiales, funciones racionales y procesos de error Gaussianos para representar el error de discretización. Propusieron modelos de errores utilizando un problema de interacción fluido-estructura tridimensional en el ala de un avión [54].

Existen muchos parámetros los cuales pueden influenciar el comportamiento de convergencia de malla. Schmidt et al estudiaron cómo identificar la influencia de diferentes parámetros en el comportamiento de convergencia de malla.

Para este propósito, utilizaron un modelo simplificado axisimétrico de un flanco de tornillo pedicular único con hueso alrededor para simular una prueba de extracción. En parámetros de estudio, los radios del flanco y las condiciones de contacto en la interfase hueso-tornillo fueron verificadas. Los resultados indicaron la necesidad de llevar a cabo una prueba apropiada de convergencia de malla durante el uso de métodos por elementos finitos. Fueron capaces de mostrar diferentes parámetros que eran fuertemente influenciados por el comportamiento de la

convergencia de malla y demostraron que las pruebas de convergencia no siempre llevan a una solución aceptable o satisfactoria [55].

Prabhune et al. mencionan que un mallado conteniendo elementos cóncavos se dice que se encuentra enredado y esto ocurre durante la generación de malla, transformación de malla, optimización del tamaño y/o simulaciones con grandes deformaciones. Aunado a esto, introdujeron un MEF enredado para el manejo de este tipo de elementos en mallados de 4 nodos cuadriláteros [56].

Mientras tanto, Navarro-Jiménez et al. muestran que los beneficios de estos métodos incluyen la discretización del dominio y la simplicidad al realizar análisis multi-red. Por estas razones, basan su trabajo en el Método por Elementos Finitos de Red Cartesiana Discretizada para solucionar un problema de contacto con fricción tridimensional bajo grandes deformaciones utilizando un método de frontera inmerso el cual usa un campo de esfuerzos suaves para evaluar iterativamente el término de estabilidad y la inclusión de superficies NURBS en los contactos cinemáticos [57].

Combinar todas las tecnologías disponibles permitirá al usuario alcanzar el desarrollo de simulaciones más avanzadas. Existe software para MEF que pueden ser usados para automatizar trabajos comunes o incluso a construir modelos paramétricos. Otros permiten que el usuario pueda crear nuevos y más rápidos procesos y tener interacciones efectivas con herramientas externas como con sistemas CAD [58].

Al utilizar estos paquetes de simulación [22], el usuario ahorra tiempo en muchos trabajos que requieren la ejecución de una simulación. Los usuarios pueden buscar los beneficios que algunos softwares tienen y averiguar cuánto tiempo pueden ahorrar en importaciones de geometría y modificaciones, mallado, detección de contacto y configuraciones generales del modelo. Invertir tiempo en aprender a tener la habilidad de estos análisis por MEF es importante por sus grandes beneficios resultantes.

Zienkiewicz y Zhu [59] presentaron un estimador de un nuevo error permitiendo que el error de la norma energética global sea bien estimado y también tenga una buena evaluación de errores locales. Los dos problemas principales son:

- El costo de recursos computacionales asociados con la estimación del error y la dificultad de implementar tales recursos en una estructura existente de código
- La imposibilidad virtual de adoptar una estructura completamente adaptiva en una estructura de código existente

Al acoplar el estimador del error con un generador de malla automático, muchas de las dificultades del segundo problema pueden ser omitidas y proceso automático completo o parcial puede ser disponible dentro de la estructura de un código existente.

Dos direcciones principales del refinamiento por la solución de elemento finito existen. La primera es la reducción simple del tamaño de subdivisión (refinamiento- h), el cual es la manera natural para la mayoría de los ingenieros. El segundo proceso de refinamiento incrementa el orden de la función prueba polinomial de aproximación en una subdivisión predefinida del elemento (refinamiento- p). El último proceso tiene unas ventajas particulares en muchas situaciones (elípticas) al combinarse con una formulación jerárquica.

El trabajo de Zienkiewicz y Zhu se concentra en un proceso eficiente de refinamiento- h para la solución de un problema elástico-lineal. La solución aproximada $\hat{u}, \hat{\sigma}$ difiere de los valores exactos u, σ y la diferencia es el error. Por lo tanto, para los desplazamientos

$$e = u - \hat{u}$$

Y para los esfuerzos

$$e_{\sigma} = \sigma - \hat{\sigma}$$

Una de las medidas más comunes es la norma energética, la cual para un problema general es

$$\|e\| = \left(\int_{\Omega} e^T L e d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

Para el caso específico de elasticidad como

$$\|e\| = \left(\int_{\Omega} (e_{\sigma}^T) D^{-1}(e_{\sigma}) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

Aunque el valor absoluto de la norma energética tiene poco significado físico, el porcentaje de error relativo es interpretado más fácilmente.

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|u\|} \times 100\%$$

El porcentaje de error η puede ser determinado para todo el dominio o para elementos del subdominio.

Un requisito muy común es especificar el logro de un cierto porcentaje de error mínimo en la norma energética. Por lo tanto, se requiere que después de completar el análisis final, la condición es

$$\eta \leq \bar{\eta}$$

Si se asume que el error es distribuido equitativamente entre los elementos, los requisitos de la ecuación anterior pueden ser traducidos para adecuar un límite de error en cada elemento.

$$\|e\|_i \leq \bar{\eta} \left[\frac{(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{e}\|^2)}{m} \right]^{\frac{1}{2}} = \bar{e}_m$$

Debido a que el error es calculado para cada elemento, es posible analizar donde es necesario refinar con la siguiente relación:

$$\xi_i = \frac{\|e\|_i}{\bar{e}_m} > 1$$

Esta relación define los elementos a ser refinados, y su valor puede decidir el grado de subdivisiones o tamaño de elemento necesario (asumiendo una cierta razón de convergencia).

Utilizando la siguiente ecuación

$$h = \frac{h_i}{\xi_i^{1/p}}$$

Donde h_i es el tamaño de elemento actual, h es el tamaño del elemento deseado y p es el orden polinomial de la función usada.

Un criterio muy lógico es insistir que dentro de cada el elemento, la desviación del esfuerzo evaluado localmente por la expresión R.M.S. debe encontrarse debajo de una cierta cantidad mínima

$$\Delta\sigma_i \leq \Delta\sigma_{permisible}$$

También, como guía para un refinamiento puede utilizarse la siguiente expresión

$$\xi_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\Delta\bar{\sigma}}$$

Utilizando cuadriláteros bilineales (elementos isoparamétricos de 4 nodos), cuadriláteros bicuadráticos (elementos isoparamétricos de 9 nodos) y triángulos lineales y cuadráticos (elementos de 3 y 6 nodos) se tienen excelentes predicciones del error y convergencia de efectividad para refinamiento.

Este método puede ser usado para casi cualquier discretización de elemento finito lineal y, actualmente, se están llevando a cabo trabajos de investigación desarrollando una metodología no lineal. Sin embargo, no existe un generador de malla para elementos tipo *brick*, ya que son difíciles de construir.

Nithesh et al. realizaron un estudio en la norma energética como un acercamiento alternativo para la convergencia de malla en la parte trasera (cola) de un disco del compresor de un motor de avión [60].

Los cálculos obtenidos por la interpolación de derivadas en los nodos resultan en un error de discretización de malla. Dichos resultados muestran una respuesta de valores de esfuerzos pico en

correspondencia al error en la energía mostrando que el error de la norma energética puede ser utilizada como criterio para probar la convergencia de la solución.

El objetivo de su estudio es desarrollar un proceso eficiente utilizando herramientas de ANSYS para probar la convergencia en solución de elemento finito usando el error de la norma energética y estableciendo un criterio en términos del porcentaje de error en la energía para probar la convergencia de la solución.

Los esfuerzos pico que obtienen se encuentran en la región de encuellamiento mínimo de la circunferencia de una cola de avión, por ende, esta región es mallada utilizando malla mapeada con refinamiento de malla sucesivo para capturar los esfuerzos de manera más precisa. El tipo de elemento utilizado es PLANE42 en 2D con opción de axisimetría.

Los gradientes de esfuerzo nodal y superficial para los esfuerzos pico del elemento junto con el correspondiente error en energía se analizan en todas las iteraciones. Finalmente, la gráfica de convergencia es establecida al graficar los valores de esfuerzo pico como una función del tamaño del elemento y el porcentaje de error con la norma energética normalizado. Sin embargo, el porcentaje de error en energía normalizado es independiente de la magnitud del valor de esfuerzo pico.

Los resultados indican y concluyen que la norma energética como técnica alternativa en análisis basado en elemento finito es adecuada para el uso como criterio de prueba de la convergencia de malla.

Chaemin Lee y Phill-Seung Lee [61] indican que existen varios tipos de elementos finitos para análisis de problemas de mecánica de sólidos, entre los cuales los elementos finitos de bajo orden como los elementos triangulares de 3 nodos y los elementos tetraédricos de 4 nodos son muy atractivos debido a su simplicidad y eficiencia.

Capítulo 4

Métodos de análisis y simulación

El presente capítulo presenta un análisis detallado de los métodos utilizados para comparar los resultados de simulación.

4.1 Porcentaje de Error mediante la Norma Energética

En el paquete de simulación, es posible obtener el porcentaje de error utilizando la norma estructural energética (SEPC) mediante el comando PRERR. Este porcentaje proporciona una aproximación del error debido a la discretización de la malla, asociado con la solución calculada para un análisis que incluyen grados de libertad, ya sea estructurales o térmicos.

La aproximación estructural se basa en el error energético, que es similar al concepto de energía de deformación. Este error representa las discrepancias entre el campo de esfuerzos calculado y el campo de esfuerzos globalmente continuo. Estas discrepancias se deben a la suposición de que solo los desplazamientos son continuos en los nodos de los elementos. El campo de esfuerzos, calculado a partir de los desplazamientos, debería ser continuo, pero generalmente no lo es [62]. En la práctica, la malla discreta induce discontinuidades y errores en el cálculo de los desplazamientos nodales y, por ende, en los esfuerzos derivados.

Para análisis estructural, también se calcula el valor absoluto máximo de la variación de esfuerzos nodales de cualquier componente de esfuerzo para cualquier nodo del elemento, conocido como SDSG (*Stress Discontinuity at Sub-Grid*). Este cálculo es utilizado para evaluar los resultados identificando posibles discontinuidades en el campo de esfuerzos nodales. Las fronteras de resultados máximo y mínimo, que consideran posible el efecto de la discretización del error, serán

mostradas mediante el comando PLNSOL [22]. Este comando permite visualizar gráficamente las distribuciones de esfuerzos en la malla y las posibles variaciones debido a la discretización.

Utilizando SEPC y PRERR, se pueden identificar y cuantificar las fuentes de error introducidas por la discretización de la malla. Estos métodos permiten evaluar la precisión de los resultados de la simulación, proporcionando una medida cuantitativa del error, que puede ser utilizada para mejorar la malla y, en consecuencia, la solución numérica.

El análisis numérico comparativo presentado en este capítulo ilustra cómo estos métodos pueden ser aplicados en diversas configuraciones de simulación para identificar errores y mejorar la precisión de los resultados. Se discute la implementación de SEPC en el software de simulación, la interpretación de los resultados obtenidos y cómo estas aproximaciones pueden guiar ajustes en la malla para optimizar la solución final.

Además, se exploran las implicaciones prácticas de estos métodos para la mejora continua de los modelos numéricos. Los resultados del análisis proporcionan una base sólida para realizar ajustes precisos en la malla, reduciendo el error y mejorando la fiabilidad de las simulaciones. Este enfoque metódico y cuantitativo asegura que los modelos numéricos sean lo más precisos y eficientes posible, lo que es crucial para aplicaciones prácticas en ingeniería y otras disciplinas técnicas.

Si el error en la energía constituye una porción significativa de la energía total, entonces el análisis deberá ser repetido utilizando un mallado más fino para obtener una solución más precisa. Aunque el error energético es relativo y depende de los problemas específicos, es posible lograr una convergencia hacia un error energético de cero mediante el refinamiento continuo de la malla.

Existen ciertas restricciones que deben ser consideradas para aplicar este enfoque [62]:

- Es válido con la mayoría de los elementos sólidos en 2D y 3D, sólidos aximétricos y Shell 3D.
- El elemento SOLID65 no puede ser usado [62], [63].
- El modelo deberá tener solamente grados de libertad estructurales o térmicos.

- El análisis debe ser lineal, tanto en términos de material como de geometría.
- Los elementos con múltiples materiales no son válidos (materiales compuestos).
- Las regiones de transición de un material a otro no son válidas, es decir, el modelo entero debe consistir en un solo material.
- Materiales anisotrópicos no son considerados.
- Evitar la transición entre diferentes tipos de elementos.

Al adherirse a estas restricciones, la técnica de aproximación del error en problemas basados en desplazamientos proporciona una medida confiable del error debido a la discretización de la malla. Si el error energético es significativo, indica la necesidad de refinar la malla para mejorar la precisión de la solución. Esta evaluación es fundamental para asegurar que el modelo numérico refleje con precisión el comportamiento del sistema real, permitiendo así decisiones de diseño.

Al analizar estos errores, los ingenieros pueden determinar si el refinamiento de la malla es necesario para alcanzar una solución más precisa. Esta técnica es particularmente útil para identificar zonas del modelo donde la malla debe ser densificada, mejorando así la fidelidad de los resultados y garantizando que las predicciones de comportamiento estructural sean lo más exactas posible.

4.1.1 Técnica de aproximación del error para problemas basados en desplazamientos

La técnica de aproximación del error en el AEF sigue un enfoque similar al realizado por Zienkiewicz y Zhu [59]. En muchas formulaciones de EF basados en desplazamientos, se hace la suposición usual de continuidad. Esta suposición resulta en un campo continuo de desplazamientos de un elemento a otro elemento, pero produce un campo de esfuerzos discontinuo. Para obtener esfuerzos más aceptables, se promedian los esfuerzos nodales del elemento [64]. Este promedio ayuda a suavizar las discontinuidades y proporciona una mejor estimación de los esfuerzos reales en el sistema. Entonces, en cuanto a los elementos, los esfuerzos en cada nodo del elemento se relacionan mediante la siguiente ecuación:

$$\{\Delta\sigma_n^i\} = \{\sigma_n^a\} - \{\sigma_n^i\}$$

Donde:

$\{\Delta\sigma_n^i\}$ es el vector de error de esfuerzos en el nodo n del elemento i .

$\{\sigma_n^a\}$ es el vector de esfuerzos promedio en el nodo n , calculado como $\frac{\sum_{i=1}^{N_e^n} \{\sigma_n^i\}}{N_e^n}$

N_e^n es el número de elementos que conectan con el nodo n .

$\{\sigma_n^i\}$ es el vector esfuerzo para el nodo n del elemento i .

Al promediar los esfuerzos nodales, se reduce la variabilidad introducida por la discontinuidad inherente en la formulación basada en desplazamientos.

Entonces, para cada elemento i , el error en la energía se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$e_i = \frac{1}{2} \int_{vol} \{\Delta\sigma\}^T [D]^{-1} \{\Delta\sigma\} d(vol)$$

Donde:

e_i es el error en la energía para el elemento i .

vol es el volumen del elemento.

$[D]$ es la matriz esfuerzo-deformación.

$\{\Delta\sigma\}$ es el vector del error del esfuerzo en los puntos solicitados (evaluados en todos $\{\Delta\sigma_n\}$ de este elemento).

El volumen (comando VOLU en el paquete de simulación) es usado para calcular el error energético por elemento. Estos errores energéticos, junto con la energía apropiada, son entonces utilizados para calcular el porcentaje de error con la norma energética.

El error en la energía sobre el modelo completo se calcula como:

$$e = \sum_{i=1}^{N_r} e_i$$

Donde:

e es el error de la energía en todo el modelo (también puede ser en partes del modelo).

N_r es el número de elementos en el modelo o partes del modelo

El cálculo del error en la energía proporciona una medida cuantitativa de la precisión del AEF. Para facilitar la interpretación y comparación de los resultados, el error en la energía puede ser normalizada contra la energía de deformación utilizando la siguiente ecuación:

$$E = 100 \left(\frac{e}{U + e} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Donde:

E es el porcentaje de error en la norma energética.

U es la energía de deformación sobre todo el modelo (también puede ser en partes del modelo).

e es el error en la energía previamente calculado.

La energía de deformación, U , puede ser obtenida mediante la siguiente ecuación:

$$U = \sum_{i=1}^{N_r} E_{ei}^{po}$$

Donde:

E_{ei}^{po} es la energía de deformación del elemento i . Este valor se puede acceder a través de la tabla generada por el software de simulación utilizando el comando SENE.

El valor E , que representa el porcentaje de error en la norma energética, ofrece una visión clara de la precisión del modelo de EF. Un valor alto de E indica una mayor discrepancia entre la solución numérica y la solución exacta, sugiriendo la necesidad de refinamiento de malla para mejorar la precisión del análisis.

4.2 Análisis experimental numérico

4.2.1 Evaluación del porcentaje de error en la norma energética con malla estructurada en ANSYS APDL

La metodología de esta investigación se basó en un proceso exhaustivo de simulación estructural diseñado para obtener resultados precisos y significativos para un diseño específico. Se comenzó utilizando una gráfica del libro de Peterson [46] como referencia. En esta etapa, se asignaron valores específicos a una geometría predefinida para que coincidiera exactamente con los puntos de la gráfica de Peterson (ver Figura 4.1). Esta estrategia permitió establecer una base sólida para la simulación bajo condiciones de carga específicas, asegurando la precisión y la consistencia en los resultados obtenidos.

El paso inicial de mapear la geometría con los datos de la gráfica proporcionó una representación precisa de las características estructurales relevantes para el estudio. Esta técnica garantizó que los parámetros geométricos y dimensionales del modelo de simulación reflejaran fielmente las condiciones del diseño original, lo que fue fundamental para garantizar la validez de los resultados obtenidos en las etapas posteriores del análisis.

Se utilizó ANSYS APDL para generar una malla estructurada basada en cuadriláteros (2D) y hexaedros (3D), permitiendo un control detallado sobre el tamaño y la disposición de los elementos de la malla. A continuación, se realizó una serie de simulaciones variando sistemáticamente el tamaño de los elementos de la malla, y se calculó el porcentaje de error utilizando la norma energética (SEPC). El comando PRERR se utilizó para obtener el porcentaje de error con la norma energética estructural.

184 CHARTS

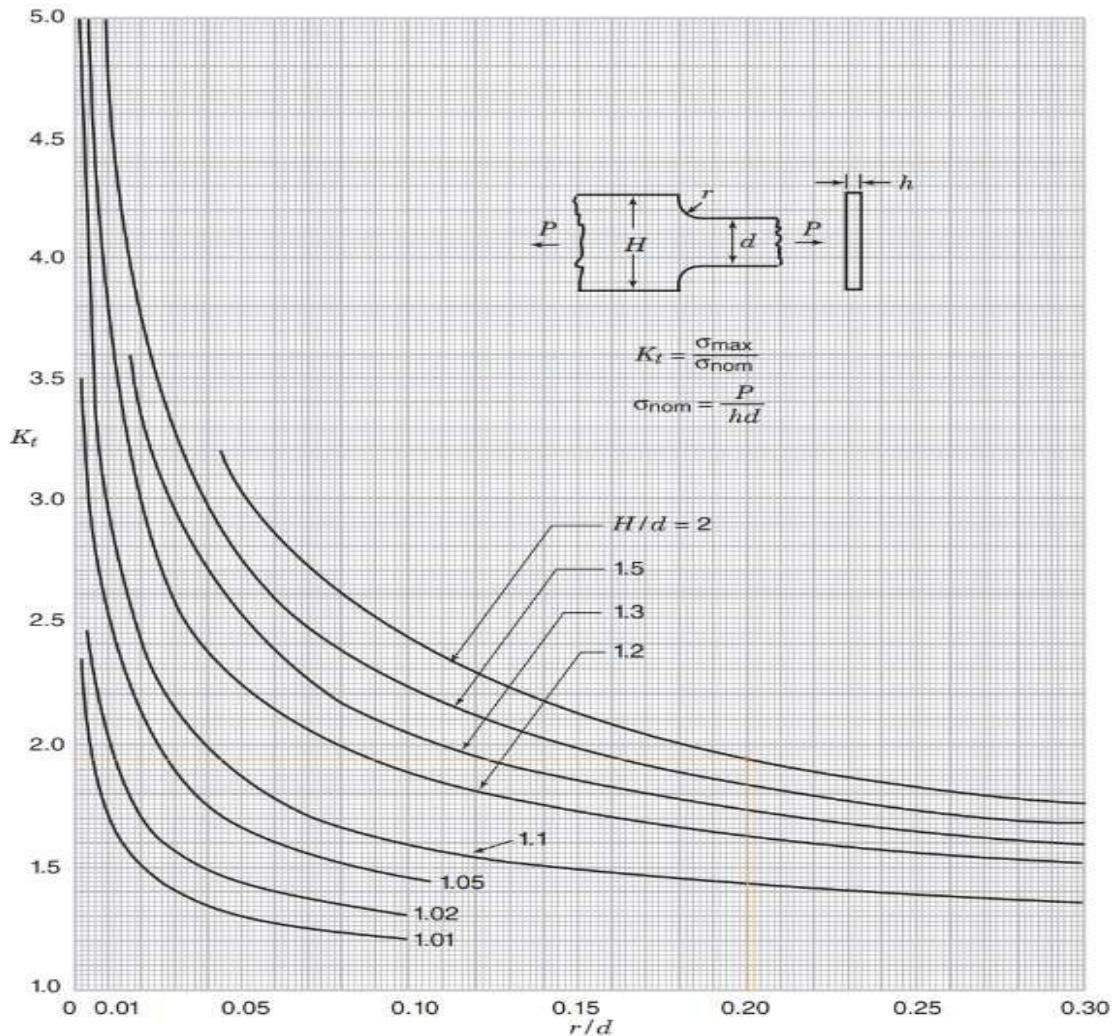


Chart 3.1 Stress concentration factors K_t for a stepped flat tension bar with shoulder fillets (based on data of Frocht 1935; Appl and Koerner 1969; Wilson and White 1973).

Figura 4.1. Factores de concentración de esfuerzos K_t para una barra a tensión plana escalonada con filetes tipo hombro [65].

Primeramente, es necesario detallar el proceso para la selección de parámetros de la gráfica de la Figura 4.1, con respecto a la geometría del modelo. Se llevó a cabo una cuidadosa selección de datos específicos que siguieran las líneas rectas hasta su intersección con la curva de la gráfica. Esto se ilustra con mayor claridad en la Figura 4.2, donde se presenta una representación visual detallada de la intersección de los datos sugeridos con la curva de la gráfica.

Los valores de los parámetros seleccionados se eligieron meticulosamente para asegurar una alineación precisa con las características estructurales relevantes del diseño. Específicamente, se

asignaron valores de r , d , H y h de manera que coincidieran exactamente con los puntos de intersección con la curva de la gráfica de Peterson. Por ejemplo, se estableció que r tuviera un valor de 0.4 m, d de 2 m, H de 4 m y h de 1 m. Esta selección de valores resultó en un valor K_t de 1.94.

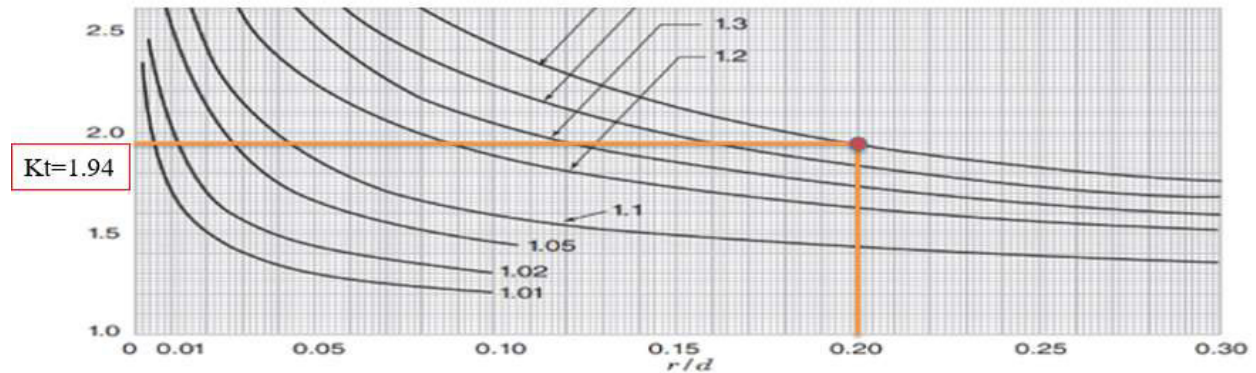


Figura 4.2. Visualización de la intersección con la curva para valor K_t [65].

En consideración a la presencia de simetría en el diseño estructural bajo análisis, se implementaron estrategias adicionales para optimizar la simulación y reducir la carga computacional. Para ello, se tomó la decisión de considerar simetría en el modelo, dividiendo algunas de las medidas relevantes por la mitad, lo que simplificó considerablemente la configuración de las condiciones de frontera y la aplicación de la fuerza de tensión sobre el modelo.

La Figura 4.3 proporciona una representación visual de estas medidas en simetría. Al dividir las dimensiones geométricas clave por la mitad, se logró una simplificación significativa en la definición de las condiciones de frontera, ya que las simetrías inherentes permitieron replicar de manera efectiva las condiciones de carga y restricción en las áreas simétricas del modelo.

Además de simplificar la implementación de las condiciones de frontera, la consideración de usar simetría también contribuyó a reducir la complejidad del modelo y el tiempo de cálculo necesario para completar la simulación. Al reducir el tamaño del modelo y el número de elementos necesarios para representarlo, se mejoró la eficiencia computacional y se facilitó la generación de resultados precisos en un tiempo razonable.

Esta estrategia no solo optimizó el proceso de simulación estructural, sino que también proporcionó una solución práctica y efectiva para abordar la simetría inherente en el diseño. Al

simplificar la configuración de las condiciones de frontera y reducir la carga computacional, se facilitó significativamente el análisis estructural y se garantizó la obtención de resultados confiables y significativos para la evaluación del rendimiento del diseño.

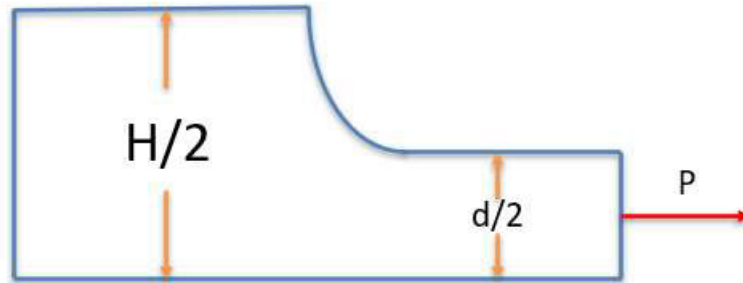


Figura 4.3. Simetría de la geometría en investigación.

Para determinar el valor máximo de esfuerzo a tensión en el diseño estructural bajo análisis, se recurrió a las ecuaciones proporcionadas por Peterson, las cuales ofrecen una metodología precisa para calcular este parámetro crítico. Con el valor conocido de K_t ($K_t = 1.94$) y el esfuerzo nominal, se aplicó la siguiente ecuación:

$$\sigma_{MAX} = (K_t)(\sigma_{nom})$$

El esfuerzo nominal σ_{nom} se obtuvo a partir de la fuerza de carga a tensión y las dimensiones d y h sugeridas en la geometría del diseño. En este caso, ambos valores fueron establecidos en 1 metro, lo que dio como resultado un esfuerzo nominal de 1000 Pascales:

$$\sigma_{nom} = \frac{P}{hd} = \frac{1000}{(1)(1)} = 1000 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{MAX} = 1,940 \text{ Pa}$$

Por lo tanto, al sustituir los valores conocidos en la ecuación, se obtuvo un esfuerzo máximo a tensión de 1,940 Pascales, representando el resultado teórico deseado en la simulación. Este valor teórico servirá como punto de comparación con el resultado numérico obtenido a través de la simulación estructural, permitiendo así evaluar la precisión y confiabilidad de los resultados obtenidos.

Se designó $L1$ como la longitud relacionada con el parámetro H , mientras que $L2$ se definió como la distancia donde actúa la fuerza de tensión. Para estudiar la influencia de la longitud $L2$ en una simulación, con el propósito de comprender mejor cómo varía el comportamiento del sistema en función de este parámetro, se llevaron a cabo experimentos donde se modificó únicamente este parámetro en dos geometrías similares.

Se crearon dos configuraciones geométricas distintas: la primera, con $L2$ establecido en 2 metros, fue identificada como la geometría corta (Figura 5.4a); mientras que la segunda, con $L2$ igual a 4.6 metros, se denominó la geometría larga (Figura 5.4b).

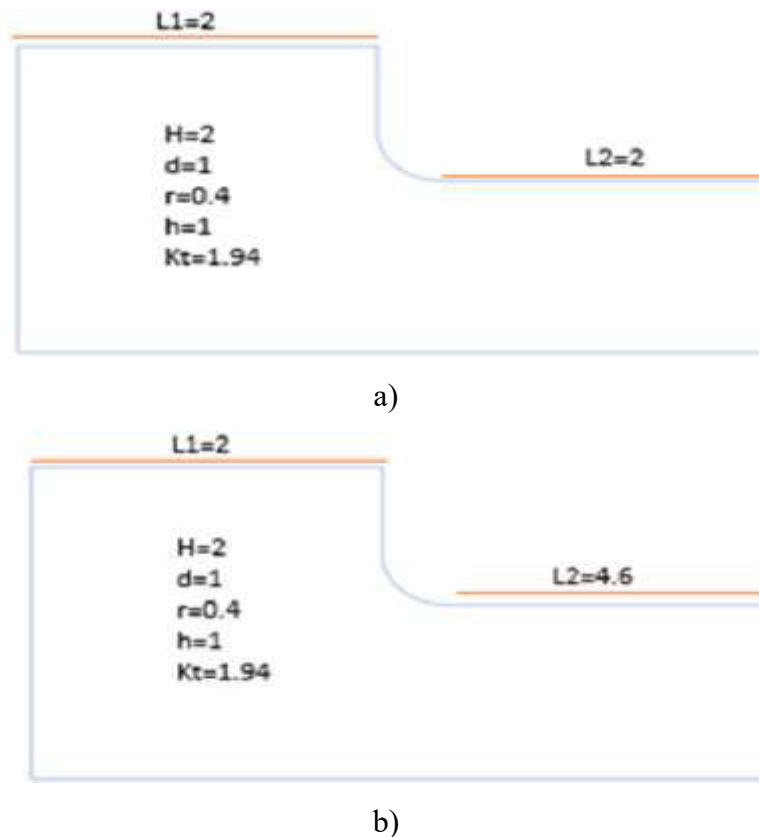
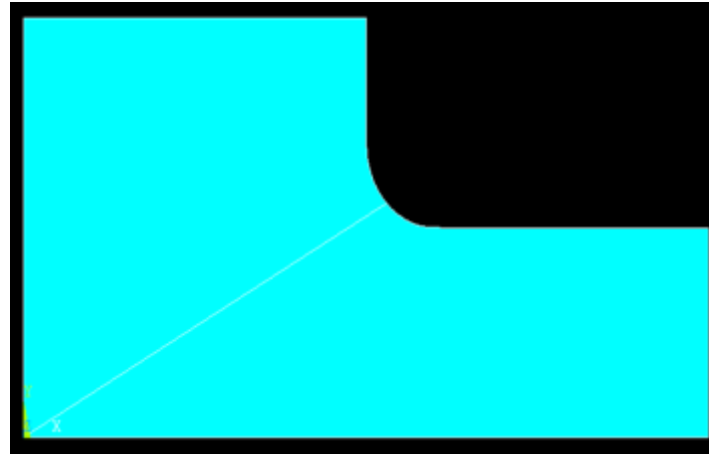


Figura 4.4. Configuraciones geométricas. a) Geometría corta y b) Geometría larga.

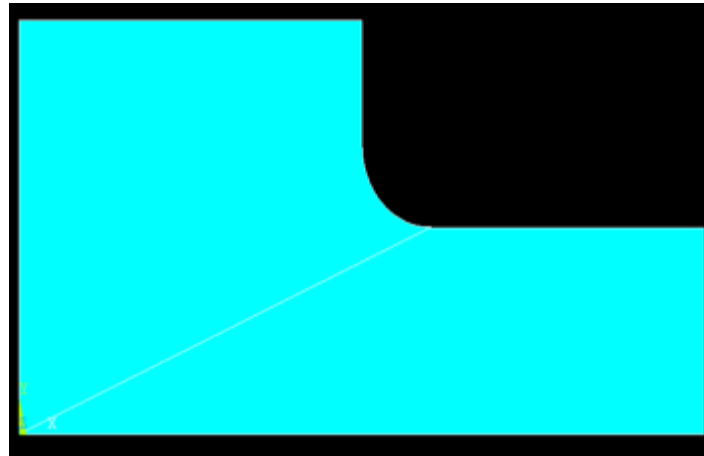
Para llevar a cabo la simulación en el entorno de ANSYS APDL en 2D, se implementaron dos divisiones diferentes en el plano de trabajo (*Working Plane*): una partiendo desde el punto de origen hacia el centro de curvatura (Figura 4.5a) y otra extendiéndose desde el punto de origen hasta el nodo donde finalizaba la curvatura (Figura 4.5b). Esta estrategia garantizó una malla

estructurada que se ajustara al tamaño del elemento requerido, asegurando así la homogeneidad y coherencia de la malla en todo el dominio de interés.

Este enfoque experimental permitió explorar de manera más exhaustiva el efecto de L2 en las respuestas del sistema, considerando diferentes configuraciones geométricas y divisiones en el plano de trabajo.



a)



b)

Figura 4.5. Divisiones de *Working Plane*. a) Punto de origen hacia el centro de la curvatura y b) Punto de origen hacia el final de la curvatura.

En el estudio de la geometría en 2D, se aplicaron condiciones de frontera para asegurar una representación correcta del modelo. En la base del modelo, se impidió el desplazamiento en la dirección U_y , restringiendo así cualquier movimiento vertical. Asimismo, en la cara lateral

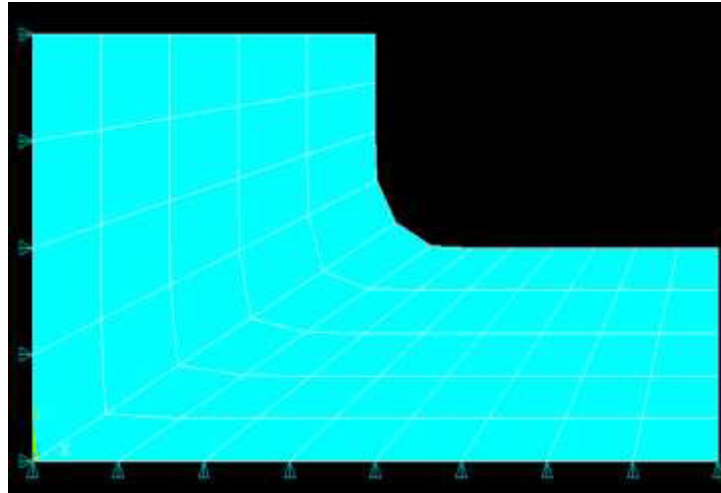
izquierda se limitó el desplazamiento en la dirección U_x , evitando cualquier movimiento horizontal en dicha cara, como se observa en la Figura 4.6a.

El análisis comparativo de los resultados obtenidos reveló que la longitud L_2 no ejerció influencia significativa en el comportamiento del sistema en cuanto al rango de valores sugeridos; existe la posibilidad que al aumentar aún más la medida de L_2 pudiera tener cierta importancia. En cuanto al tipo de división en el plano de trabajo, se pudo determinar la importancia de este parámetro en el comportamiento del sistema estudiado. Estos hallazgos son fundamentales para el diseño y la optimización de sistemas que dependen de la geometría y la distribución de la malla para lograr un rendimiento óptimo.

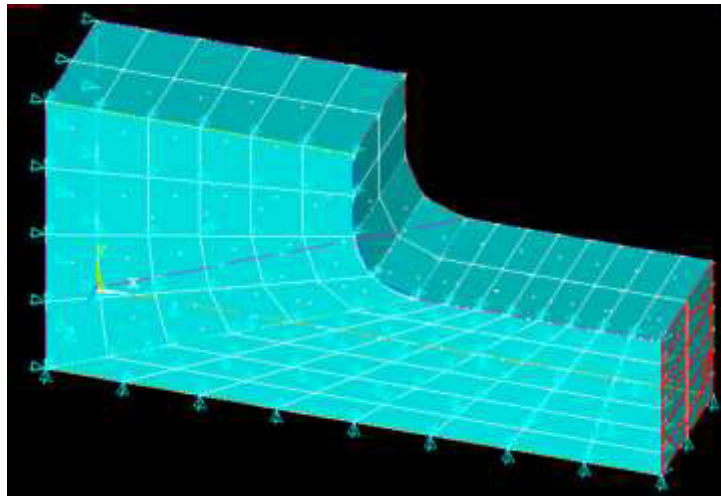
Posteriormente, se realizó la simulación en 3D (Figura 4.6b), lo que proporcionó una perspectiva tridimensional más detallada del comportamiento del sistema estudiado. Esta transición de 2D a 3D permitió una evaluación más completa de los efectos en la respuesta del sistema, debido a que las simulaciones en 2D permitieron observar el comportamiento en cuanto a la cantidad de elementos y las dimensiones establecidas para lograr entender más a fondo lo que se espera obtener en la simulación 3D. Además, se concretó que sería mejor utilizar la geometría corta para la simulación 3D, y así reducir el tiempo de cómputo.

En el análisis de geometría en 3D, se establecieron las condiciones de frontera específicas para asegurar la correcta representación del modelo. En la base, se restringió el desplazamiento en la dirección U_y , impidiendo cualquier movimiento vertical. En la cara lateral izquierda, se restringió el desplazamiento en la dirección U_x , limitando los movimientos horizontales en esa cara. Finalmente, en la cara frontal, se impuso una restricción en el desplazamiento en la dirección U_z , evitando cualquier movimiento hacia adelante o hacia atrás. Estas condiciones de frontera se ilustran detalladamente en la Figura 4.6b.

Durante estas simulaciones, se llevó a cabo un registro y análisis de los resultados obtenidos. Se prestó especial atención a diversos aspectos, incluyendo los porcentajes de error con respecto a la norma energética, los esfuerzos nodales con su correspondiente porcentaje de error en comparación con los valores obtenidos mediante la gráfica de Peterson, y los esfuerzos en los elementos con su respectivo porcentaje de error, también en relación con los esfuerzos nodales.



a)



b)

Figura 4.6. Condiciones de frontera. a) Representación en 2D y b) Representación en 3D.

Este análisis meticuloso permitió evaluar la precisión y confiabilidad de los resultados obtenidos a través de la simulación estructural. Se identificaron y documentaron los resultados entre los valores simulados y los valores teóricos esperados, lo que proporcionó información valiosa sobre la calidad y la exactitud de la simulación realizada.

Tras finalizar las simulaciones de mallado estructurado en ANSYS APDL junto con su correspondiente porcentaje de error, se procedió a avanzar en el paquete de simulación ANSYS Workbench para explorar los mallados libres. Este proceso permitió no solo validar los resultados

obtenidos en la etapa de simulación en APDL, sino también identificar y comprender la influencia de los parámetros del mallado en la precisión y exactitud de las simulaciones.

4.2.2 Evaluación de parámetros de mallado para una malla libre en ANSYS Workbench

Durante esta etapa, se llevó a cabo una evaluación de diversos métodos de mallado, incluyendo el automático, *Patch Conforming* (PC) y *Patch Independent* (PI). Mientras que los dos primeros generan mallados estructurados con *bricks* o hexaedros, el *Patch Independent* ofrece la posibilidad de utilizar tetraedros, que es el enfoque principal de este estudio.

El algoritmo de malla PI para tetraedros es un algoritmo de mallado "de arriba hacia abajo" basado en el algoritmo de subdivisión espacial que garantiza el refinamiento de la malla cuando sea necesario, pero mantiene elementos más grandes cuando sea posible, lo que permite un cálculo más rápido [66]. Se recomienda el algoritmo de tetraedros PC para el mallado tetraédrico, pero en algunos casos el método PI puede resultar más útil.

En cada etapa de subdivisión, el algoritmo del mallador PI implementa una estrategia para mantener la uniformidad en el tamaño de los elementos de la malla. Para lograr esto, la longitud de cada borde del tetraedro se divide por 2, asegurando que los elementos adyacentes no difieran en tamaño en más de un factor de 2. Una vez lograda esta uniformidad, el mallador PI se centra en hacer que la malla sea conforme, garantizando que cada par de elementos adyacentes comparta una cara completa [66].

A pesar de estos ajustes, la malla generada aún puede no coincidir exactamente con la geometría del modelo original. Por lo tanto, el mallador PI procede a redondear los nodos de la malla para que se alineen con los puntos, curvas o superficies especificados en el modelo. Posteriormente, el mallador "corta" cualquier parte de la malla que no pueda ser alcanzada por un punto de material definido por el usuario sin la intersección de una superficie. Este proceso finaliza con la suavización de la malla, que implica el ajuste de nodos, la fusión de nodos cercanos, el intercambio de bordes y, en algunos casos, la eliminación de elementos defectuosos para garantizar la integridad y calidad general de la malla generada [66].

Durante la evaluación del mallador PI y el mallado general, se identificaron una serie de parámetros clave que influían en la calidad del mallado. Dada la complejidad de esta situación y la interacción entre múltiples variables, se optó por realizar diversas simulaciones variando los parámetros en estas dos secciones. El objetivo principal era reducir la cantidad de parámetros significativos y comprender su impacto en los resultados de la simulación.

Para seleccionar los factores en el presente estudio, es esencial delimitar el problema estableciendo claramente el objetivo del experimento y el resultado deseado. Posteriormente, se deben seleccionar las variables de respuesta que representan el problema a resolver y determinar cómo se pueden medir de manera confiable. Esto incluye definir qué se espera lograr y cuáles son las metas específicas del estudio.

En particular, se compararon el esfuerzo máximo obtenido mediante ANSYS Workbench con y sin promediar, junto con el esfuerzo obtenido a partir de la gráfica de Peterson (Figura 4.1). Esta comparación permitió evaluar la precisión y confiabilidad de los resultados de ANSYS Workbench en relación con los valores teóricos esperados. Además, se analizó cómo variaban los resultados en función de los diferentes parámetros de mallado, proporcionando información sobre la sensibilidad de malla con estos parámetros.

Una vez establecidas las variables de respuesta, se determinan los factores que se estarán variando para su estudio, analizando su influencia sobre la respuesta. Es crucial ajustar un rango experimental adecuado para cada factor y seleccionar el diseño de experimentos más apropiado.

Este proceso incluye:

1. Identificación de factores que potencialmente afectan la variable de respuesta.
2. Determinación de los niveles a los que se probarán estos factores.
3. Selección de un diseño experimental que permita la evaluación eficaz de los efectos de los factores seleccionados.

Para investigar todos los factores se necesita realizar muchas pruebas, mucho tiempo y mucho recurso, por lo que la selección del diseño es primordial.

Previo a la ejecución de las simulaciones, se llevó a cabo una exploración exhaustiva de todos los parámetros disponibles en el mallado utilizando ANSYS Workbench.

Estos parámetros incluyen:

1. **Tamaño del elemento:** Este parámetro permite especificar el tamaño deseado para los elementos de la malla, lo que influye en la resolución y precisión de la simulación.
2. **Tipo de elemento:** Define el tipo de elemento que se utilizará en la malla, como tetraedros, hexaedros, prismas, etc. La elección del tipo de elemento puede tener un impacto significativo en la precisión y eficiencia del análisis.
3. **Método de generación de malla:** ANSYS Workbench ofrece diferentes métodos para generar la malla, que pueden ser automáticos, manuales o una combinación de ambos, dependiendo de las necesidades específicas del análisis.
4. **Parámetros de calidad de malla:** Incluye criterios para garantizar la calidad de la malla generada, como la relación de aspecto, la suavidad de la transición entre elementos, etc. Estos criterios son fundamentales para asegurar la precisión y estabilidad de la simulación.
5. **Refinamiento de malla:** Permite agregar refinamientos locales en áreas específicas de la geometría para capturar detalles importantes o zonas de interés. Esto es especialmente útil para mejorar la resolución en áreas críticas del modelo.
6. **Transición entre elementos:** Define cómo se realizará la transición entre diferentes tamaños de elementos para garantizar una malla suave y uniforme de alta calidad con una transición suave entre los elementos en áreas críticas del modelo.

Estos son solo algunos de los parámetros disponibles en ANSYS Workbench para la generación de mallas. La comprensión detallada de cada uno de estos parámetros es fundamental para configurar adecuadamente el proceso de simulación y obtener resultados precisos y confiables. En la Figura 4.7, se muestran los parámetros utilizados en las simulaciones de mallado libre en ANSYS Workbench, sin considerar la elección del tipo de elemento.

Ahora se tendrá un enfoque en los parámetros específicos disponibles al elegir tetraedros como tipo de elemento en ANSYS Workbench, dado que los tetraedros son uno de los principales objetivos de este estudio. La generación de mallas tetraédricas es crucial para capturar geometrías complejas con precisión y eficiencia.

Los parámetros de los tetraedros PI en ANSYS Workbench incluyen una variedad de opciones que permiten ajustar la calidad y la densidad de la malla tetraédrica. Estos parámetros vienen con sus posibles combinaciones, lo que brinda flexibilidad para adaptarse a las necesidades específicas del problema en estudio.

Estos parámetros y sus combinaciones proporcionan un conjunto amplio de herramientas para controlar y ajustar la generación de mallas tetraédricas en ANSYS Workbench, lo que permite obtener resultados precisos y confiables para una amplia gama de aplicaciones en ingeniería y ciencias aplicadas. En la Figura 4.8 se muestran dichos parámetros.

Mesh										
Element Order	Linear			Quadratic						
Element Size	Value									
Use Adaptive Sizing	Yes			No						
Resolution	Value (Choose or Default 2)									
Mesh Defeaturing	Yes			No						
Defeature Size	Value (Choose or Default)									
Transition	Slow			Fast						
Span Angle Center	Coarse			Medium			Fine			
Initial Size Seed	Assembly			Part						
Target Quality	Value (Choose or Default 0.05)									
Smoothing	Low			Medium			High			
Mesh Metric	Jacobian Ratio (MAPDL)									
Use Automatic Inflation	None			Program Controlled			Faces in Name Selection			
Inflation Option	Total Thickness			First Layer Thickness			Smooth Transition		First Aspect Ratio	Last Aspect Ratio
Number of Layers	Value									
Maximum Layers				Value			Value		Value	Value
First Layer Height				Value						Value
Transition Ratio							Value			
First Aspect Ratio									Value	
Aspect Ratio										Value
Maximum Thickness	Value									
Growth Rate	Value			Value			Value		Value	
Inflation Algorithm	Post	Pre		Post	Pre		Post	Pre		
View Advanced Options	Yes			No						
Collision Avoidance	None			Layer Compression			Stair Stepping			
Maximum Height over Base	Value									
Growth Rate Type	Exponential	Geometric	Linear	Exponential	Geometric	Linear	Exponential	Geometric	Linear	
Maximum Angle	Value									
Fillet Ratio	Value									
Use Post Smoothing	Yes	No		Yes	No		Yes	No		
Smoothing Iterations	Value									
Fix First Layer				Yes	No					
Gap Factor				Value			Value			
Growth Rate				Value (Choose or Default 1.85)						
Max Size				Value (Choose or Default 5e-2 m)						
Mesh Defeaturing				Yes	No					
Defeature Size				Value (Choose or Default 1.25e-4)						
Capture Curvature				Yes	No					
Curvature Min Size				Value (Choose or Default 2.5e-4)						
Curvature Normal Angle				Value (Choose or Default						
Capture Proximity				Yes	No					
Proximity Min Size				Value (Choose or Default 2.5e-4)						
Num Cells Across Gap				Value (Choose or Default 3)						
Proximity Size Function Sources				Faces and Edges	Faces	Edges				

Figura 4.7. Parámetros de mallado general.

Method: Tetrahedrons				
Algorithm: Independent				
Element Order	Global	Linear	Quadratic	
Defined By	Max Element Size		Approx. Number of Elements per Part	
Max Element Size	Value (Choose or Default 2.5e-2m)			
Approx Number of Elements per Part			Value	
Feature Angle	Value (Choose or Default 30°)			
Mesh Based Defeaturing	On		Off	
Defeature Size	Value (Choose or Default)			
Refinement	No	Proximity and Curvature	Curvature	Proximity
Min Size Limit		Value	Value	Value
Num Cells Across Gap		Value (Choose or Default)		Value (Choose or Default)
Curvature Normal Angle		Value (Choose or Default)	Value (Choose or Default)	
Smooth Transition	On		Off	
Growth Rate	Value (Choose or Default)			

Figura 4.8. Parámetros de mallado tetraédrico “Patch Independent”.

El proceso se continuó con la generación de un conjunto diverso de combinaciones de parámetros para el mallado, tanto en el mallado general como en el método de tetraedros PI en ANSYS Workbench. Se procedió a realizar un conjunto de 71 diferentes combinaciones que fueron cuidadosamente seleccionadas para explorar una amplia gama de configuraciones posibles. Algunas de estas combinaciones se observan en la Figura 4.9.

Cada combinación se ejecutó individualmente en el software de simulación y se creó con el objetivo de explorar una amplia gama de configuraciones posibles. El uso de realizar diferentes combinaciones permitió abordar de manera exhaustiva el espacio de diseño y evaluar cómo diferentes configuraciones podrían afectar los resultados de la simulación. Esta estrategia proporcionó una perspectiva completa para analizar la sensibilidad de los resultados a las variaciones en los parámetros de mallado.

Luego de llevar a cabo alrededor de 70 simulaciones variadas, se aplicó un criterio de selección riguroso para filtrar los resultados. Inicialmente, se consideraron aquellos resultados que se encontraban dentro del 5% de error. Sin embargo, debido a la amplia variabilidad observada en estas simulaciones filtradas, se decidió establecer un umbral más estricto, optando por seleccionar únicamente aquellas simulaciones que presentaran un porcentaje de error menor al 1%. Este enfoque permitió identificar de manera más precisa los parámetros que influían en los resultados y garantizar la fiabilidad de estos.

40		41		48	
Element Order: Global Settings		Element Order: Global Settings		Element Order: Global Settings	
Defined By	Max Element Size	Defined By	Max Element Size	Defined By	Max Element Size
Max Element Size	0.05 (Default)	Max Element Size	0.05 (Default)	Max Element Size	0.05 (Default)
Feature Angle	30° (Default)	Feature Angle	30° (Default)	Feature Angle	30° (Default)
Mesh Based Defeaturing	Off	Mesh Based Defeaturing	On	Mesh Based Defeaturing	On
Refinement	Curvature	Defeature Size	0.000125 (Default)	Defeature Size	0.000125 (Default)
Min Size Limit	Default	Refinement	Proximity	Refinement	Proximity and Curvature
Curvature Normal Angle	Default	Min Size Limit	Default	Min Size Limit	Default
Smooth Transition	On	Num Cells Across Gap	Default	Num Cells Across Gap	Default
Growth Rate	Default	Smooth Transition	On	Curvature Normal Angle	Default
Element Order in Mesh	Quadratic	Growth Rate	Default	Smooth Transition	On
Element Size	0.025	Element Order in Mesh	Quadratic	Growth Rate	5
Use Adaptive Sizing	No	Element Size	0.025	Element Order in Mesh	Quadratic
Growth Rate	1.85 (Default)	Use Adaptive Sizing	No	Element Size	0.025
Max Size	0.05 (Default)	Growth Rate	1.85 (Default)	Use Adaptive Sizing	No
Mesh Defeaturing	Yes	Max Size	0.05 (Default)	Growth Rate	1.85 (Default)
Defeature Size	0.000125 (Default)	Mesh Defeaturing	Yes	Max Size	0.05 (Default)
Capture Curvature	Yes	Defeature Size	0.000125 (Default)	Mesh Defeaturing	Yes
Curvature Min Size	0.00025 (Default)	Capture Curvature	Yes	Defeature Size	0.000125 (Default)
Curvature Normal Angle	70.395° (Default)	Curvature Min Size	0.00025 (Default)	Capture Curvature	Yes
Capture Proximity	Yes	Curvature Normal Angle	70.395° (Default)	Curvature Min Size	0.00025 (Default)
Proximity Min Size	0.00025 (Default)	Capture Proximity	Yes	Curvature Normal Angle	70.395° (Default)
Num Cells Across Gap	3 (Default)	Proximity Min Size	0.00025 (Default)	Capture Proximity	Yes
Proximity Size Function Sources	Faces and Edges	Num Cells Across Gap	3 (Default)	Proximity Min Size	0.00025 (Default)
Target Quality	0.05	Proximity Size Function Sources	Faces and Edges	Num Cells Across Gap	3 (Default)
Smoothing	High	Target Quality	0.05	Proximity Size Function Sources	Faces and Edges
Use Automatic Inflation	None	Smoothing	High	Target Quality	0.05
Inflation Option	Smooth Transition	Use Automatic Inflation	None	Smoothing	High
Transition Ratio	0.272	Inflation Option	Smooth Transition	Use Automatic Inflation	None
Maximum Layers	5	Transition Ratio	0.272	Inflation Option	Smooth Transition
Growth Rate	1.2	Maximum Layers	5	Transition Ratio	0.272
Inflation Algorithm	Pre	Growth Rate	1.2	Maximum Layers	5
View Advanced Options	No	Inflation Algorithm	Pre	Growth Rate	1.2
		View Advanced Options	No	Inflation Algorithm	Pre
Mesh Time	5 minutos 35 segundos			View Advanced Options	No
Solution Time	2 minutos 40 segundos	Mesh Time	5 minutos 50 segundos		
		Solution Time	2 minutos 45 segundos	Mesh Time	5 minutos 15 segundos
Min Jacobian	1			Solution Time	2 minutos 25 segundos
Max Jacobian	1652.9	Min Jacobian	1		
Standard Deviation (SD)	2.0251	Max Jacobian	2109.6	Min Jacobian	1
		Standard Deviation (SD)	2.6815	Max Jacobian	1957.1
Averaged Stress	1940.7			Standard Deviation (SD)	2.3075
Unaveraged Stress	1942.1	Averaged Stress	1940.7		
		Unaveraged Stress	2018.4	Averaged Stress	1940.4
% Error ave-unave	0.0721389%			Unaveraged Stress	1943.1
Error ave-petersen	0.0361%	% Error ave-unave	4.0037100%		
Error unave petersen	0.1082%	% Error ave-petersen	0.0361%	% Error ave-unave	0.1391466%
		% Error unave petersen	4.0412%	% Error ave-petersen	0.0206%
Nodos	1 629 248			% Error unave petersen	0.1598%
Elementos	785 388	Nodos	1 629 146		
		Elementos	785 276	Nodos	1 626 259
				Elementos	784 065

Figura 4.9. Ejemplos de combinaciones realizadas con sus resultados.

Después de este proceso de análisis y filtrado de datos, se identificaron un total de 7 simulaciones que mostraron los parámetros más significativos para el estudio en cuestión (Tabla 7).

Tabla 7. Filtro de parámetros.

Parámetro	Simulación	Simulación	Simulación	Simulación	Simulación	Simulación	Simulación
	1	2	3	4	5	6	7
Max Element Size	0.05	0.25	0.02	0.05	0.1	0.5	0.05
Feature Angle	30°	30°	30°	45°	20°	30°	30°
Growth Rate	<i>Default</i>	<i>Default</i>	<i>Default</i>	<i>Default</i>	<i>Default</i>	<i>Default</i>	1.2
Smooth Transition	<i>Off</i>	<i>Off</i>	<i>Off</i>	<i>Off</i>	<i>Off</i>	<i>On</i>	<i>On</i>
Curvature Normal	<i>Default</i>	<i>Default</i>	<i>Default</i>	<i>Default</i>	<i>Default</i>	<i>Default</i>	60°
Refinement	<i>Proximity and Curvature</i>	<i>Proximity and Curvature</i>	<i>Proximity and Curvature</i>	<i>Proximity and Curvature</i>	<i>Proximity and Curvature</i>	<i>Curvature</i>	<i>Proximity and Curvature</i>

La selección de estas 7 simulaciones proporcionó una base sólida para el análisis detallado de los efectos de los diferentes parámetros de mallado en los resultados de la simulación. Estos resultados seleccionados sirvieron como punto de partida para las etapas posteriores del estudio, permitiendo un enfoque más eficiente en la identificación de relaciones y patrones significativos en los datos obtenidos. A continuación, se describirán los parámetros seleccionados [66]:

- **Max Element Size:** Especifica el tamaño de la subdivisión de elemento inicial. El tamaño del elemento permite especificar el tamaño del elemento que se utilizará en todo mallado de borde, cara, o cuerpo [67]. El valor predeterminado es el factor de cuadro delimitador (*Bounding Box Factor*) de 0.05 [68].
- **Feature Angle:** Especifica el ángulo mínimo en el cual las características de la geometría son capturadas. Si el ángulo entre dos caras es menor que el especificado en este parámetro, el borde entre las caras es ignorado, y los nodos serán colocados sin respetar ese borde. Si el ángulo entre 2 caras es mayor al de este parámetro, el borde se conservará y la malla debe alinearse y asociarse con él. Se puede especificar un valor desde 0° (captura la

mayoría de los bordes) hasta 90° (ignora la mayoría de los bordes) o aceptar el predeterminado de 30° .

- **Growth Rate:** Representa el aumento en la longitud del borde del elemento con cada capa sucesiva de elementos. Por ejemplo, una razón de crecimiento de 1.2 resulta en un aumento del 20% en la longitud del borde del elemento con capa sucesiva. El rango se puede determinar entre 1 y 5. Cuando la configuración de tamaño adaptado se encuentra desactivada, el valor predeterminado (1.85) [69], de lo contrario tendrá un valor de 2 si la transición suave se encuentra desactivada o un valor de 1.2 si la transición suave se encuentra activada.
- **Smooth Transition:** Determina si el mallado del volumen “*Octree*” generado debe conservarse o ser reemplazado con una malla de volumen “*Delaunay*” a partir de la malla de superficie. Cuando la transición suave está activada, la malla de volumen será una malla de *Delaunay*. *Octree* crea un cubo grande alrededor de la geometría y lo divide una y otra vez en elementos tetraédricos más pequeños de manera descendente hasta alcanzar los requisitos de malla. Luego proyecta elemento sobre la geometría, desechando los elementos que quedan fuera de la geometría. *Delaunay* primero crea una malla en las superficies de su geometría de manera ascendente y, a partir de ahí, la malla comienza a crecer dentro de la geometría hasta que está completamente llena de elementos [70], [71].
- **Refinement:** Refina la malla automáticamente basada en la curvatura de la geometría o proximidad o ambos. Esto resultará en elementos más grandes en caras planas y elementos más pequeños en áreas de alta curvatura o dentro de pequeños espacios. Las opciones son No, Curvatura, Proximidad, y Proximidad y Curvatura siendo esta última la predeterminada. El límite de tamaño mínimo evita que la curvatura o proximidad basada en refinamiento genere elementos demasiado pequeños. Esto funciona subdividiendo los elementos hasta alcanzar el valor seleccionado.
- **Curvature Normal:** Configura el objetivo de la curvatura basada en el refinamiento anterior. El mallado será subdividido en regiones curvas hasta que los elementos individuales abarquen este ángulo. El refinamiento también está limitado por el límite del

tamaño mínimo. Puede especificar un valor de 0° a 180° . El ángulo normal de curvatura está disponible solo cuando el refinamiento está establecido en Proximidad y Curvatura o Curvatura. El valor predeterminado depende de si las opciones de tamaño adaptado son activadas o no, en caso de no ser activadas el valor sería de 70.395° [69], [72], en caso de ser activadas dependería de la opción de ángulo abarcado central teniendo ángulos burdos (91° a 60°), medios (75° a 24°) o finos (36° a 12°) [73].

Después de identificar los parámetros más significativos a partir de las simulaciones previas, se procedió a integrarlos en un diseño de experimentos factorial completo. Se seleccionaron los dos niveles más relevantes de cada parámetro (resaltados en color verde en la Tabla 7) mediante la identificación del menor y el mayor valor de cada parámetro, los cuales fueron considerados como factores en el diseño experimental. Esta estrategia permitió abordar de manera sistemática la interacción entre los diferentes parámetros y su influencia en los resultados de la simulación.

El diseño de experimentos factorial completo se estructuró con base a estos parámetros óptimos, dando lugar a un total de 64 simulaciones adicionales. Cada una de estas simulaciones representaba una combinación única de los niveles seleccionados para cada factor. Este enfoque riguroso y completo facilitó la generación de datos necesarios para realizar un análisis detallado del impacto de cada parámetro en los resultados de la simulación.

El objetivo principal de este diseño experimental era obtener información precisa y detallada sobre cómo variaba el comportamiento del sistema en función de los diferentes parámetros de mallado. A través de la generación de gráficas de inferencia y análisis estadísticos, se busca identificar tendencias, patrones y relaciones significativas entre los factores y las respuestas del sistema. Este enfoque permitiría una comprensión más profunda de la influencia de los parámetros de mallado en el rendimiento y la precisión de la simulación.

Las simulaciones cuidadosamente seleccionadas proporcionaron información esencial sobre la influencia de los factores identificados en los resultados del experimento. Cada factor, junto con sus niveles correspondientes, se convirtió en una variable fundamental en el diseño experimental, lo que permitió investigar la variación de los resultados en función de los diferentes niveles de cada factor.

Este conjunto específico de simulaciones y parámetros significativos ahora sirve como la base para la siguiente fase del estudio. A partir de estos resultados, se espera obtener una comprensión más profunda y cuantitativa de cómo los factores identificados impactan los resultados del experimento.

El objetivo en esta nueva etapa será explorar y entender la relación entre los factores del diseño experimental y las respuestas del sistema mediante las gráficas de efectos principales y las gráficas de interacción. Además, se llevará a cabo una evaluación crítica de la robustez y la validez de los resultados obtenidos, lo que garantizará la fiabilidad y la precisión de las conclusiones extraídas.

En última instancia, se espera que esta fase del estudio proporcione una visión más completa y detallada de cómo los factores de mallado influyen en el comportamiento y la precisión de la simulación. Estos hallazgos serán fundamentales para el avance del conocimiento en el campo y pueden tener implicaciones importantes para el diseño y la optimización de sistemas basados en simulaciones numéricas.

Capítulo 5

Discusión de resultados

5.1 Análisis del porcentaje de error en la norma energética con malla estructurada en ANSYS APDL.

Las simulaciones realizadas en ANSYS APDL utilizando la división del *Working Plane* proporcionaron una visión detallada de cómo el tamaño del elemento influye en los resultados del análisis. Estas simulaciones se llevaron a cabo tanto en 2D como en 3D, lo que permitió una evaluación exhaustiva de la respuesta del sistema en diferentes dimensiones.

En el caso de la división del *Working Plane* hacia el *endpoint* de la curva con la geometría corta, se estableció una configuración de referencia para comparar los resultados. Esta configuración proporcionó una base sólida para evaluar el efecto del tamaño del elemento en el comportamiento del sistema.

Posteriormente, se repitió el proceso de simulación, dividiendo el *Working Plane* hacia la mitad de la curva mientras se mantenía constante la primera longitud. Esta variación en la configuración del *Working Plane* permitió examinar cómo los resultados del análisis respondían a cambios en la distribución de la malla.

Los resultados de las simulaciones revelaron que el tamaño del elemento tenía un impacto significativo en la precisión y la estabilidad de los resultados del análisis. En general, se observó que a medida que se reducía el tamaño del elemento, aumentaba la precisión de los resultados, especialmente en áreas críticas de interés. Sin embargo, esta mejora en la precisión venía acompañada de un aumento en el tiempo de cálculo y en los requisitos computacionales.

Por otro lado, se encontró que la distribución del *Working Plane* también tenía un efecto notable en los resultados del análisis. En particular, se observó que la división del *Working Plane* hacia la mitad de la curva proporcionaba una mayor resolución en áreas específicas de interés, lo que resultaba en una representación más detallada del comportamiento del sistema en esas regiones.

Durante la fase posterior del estudio, se procedió a repetir el procedimiento de simulación con las mismas variaciones en las divisiones del *Working Plane* utilizando la segunda medida de longitud (geometría larga). Esta estrategia permitió una exploración más profunda sobre cómo la ubicación de la división en relación con la curvatura y las medidas de longitud específicas impactaban en los resultados de la simulación.

El propósito principal de estas simulaciones era analizar de manera detallada cómo la variación en el tamaño del elemento, las longitudes y la ubicación de las divisiones del *Working Plane* afectaban la calidad de la malla y, en última instancia, los resultados del análisis. Al comparar las diferentes configuraciones, se buscaba obtener una comprensión más completa de cómo estos factores influyen en la precisión y la estabilidad de los resultados obtenidos.

Durante este proceso de simulación, se registraron meticulosamente los resultados obtenidos, incluidos el porcentaje de error con la norma energética y el porcentaje de error teórico. Estas métricas proporcionaron una medida cuantitativa de la precisión de las simulaciones en comparación con los resultados esperados teóricamente.

En las tablas 8, 9, 10 y 11 del Apéndice I se presentan los resultados detallados de los esfuerzos obtenidos para cada una de las variaciones en el tamaño del elemento y el tipo de elemento utilizado (Plane 182 y Plane 183 para Cuadriláteros y Triángulos, respectivamente), así como las configuraciones específicas del *Working Plane* en la división de la geometría. Estos resultados se acompañan de su respectivo porcentaje de error calculado mediante la norma energética, lo que proporciona una medida cuantitativa de la precisión de las simulaciones en comparación con los valores esperados teóricamente.

Cada tabla presenta una comparación detallada entre los resultados obtenidos y los valores teóricos esperados, destacando el porcentaje de error experimental que tienen los resultados numéricos y teóricos.

En la Tabla 8 del apéndice I, se presenta un análisis de la geometría corta en 2D, con una división del *Working Plane* hacia el punto final de la curva. Se realizaron un total de 12 simulaciones, de las cuales 6 utilizaron el elemento PLANE182 y las otras 6 el elemento PLANE183. Cada conjunto de simulaciones varió el tamaño del elemento de forma descendente.

En las simulaciones 1 y 2, con tamaños de elemento de 0.5 y 0.25, no se observaron coincidencias significativas entre los resultados numéricos y los valores teóricos. Además, los porcentajes de error según la norma energética no fueron aceptables. Esto indica que la densidad de malla utilizada no proporcionó una aproximación adecuada a la solución teórica.

Las simulaciones 3 y 4, con tamaños de elemento 0.1 y 0.05, mostraron un avance considerable, con un porcentaje de error según la norma energética menor al 5%, lo que se considera aceptable. Sin embargo, los porcentajes de error experimentales entre los resultados numéricos y teóricos seguían siendo elevados, indicando que aún había discrepancias significativas en la precisión de los resultados.

En las simulaciones 5 y 6, con tamaños de elemento de 0.025 y 0.01, se observaron resultados más cercanos a los teóricos. El porcentaje de error según la norma energética se mantuvo por debajo del 5% y, en algunos casos, incluso menor al 1.5%. Esto demuestra una mejora en la calidad de la malla y en la precisión de los resultados obtenidos.

A partir de la simulación 7, se comenzó a utilizar el elemento PLANE183. Sin embargo, en esta simulación, con un tamaño de elemento de 0.5, los porcentajes de error tanto en la norma energética como en los resultados experimentales no se encontraban dentro de rangos aceptables, lo que sugiere que la transición a este tipo de elemento no mejoró inmediatamente la precisión.

En la simulación 8, con un tamaño de elemento de 0.25, se obtuvo un porcentaje de error aceptable según la norma energética, pero el porcentaje de error experimental seguía siendo alto y fuera de los rangos aceptables. Esto indica que, aunque hubo mejoras en ciertos aspectos, todavía se necesitaban ajustes adicionales para mejorar la precisión general.

Finalmente, en las simulaciones 9 a 12, con tamaños de elemento de 0.1, 0.05, 0.025 y 0.01 respectivamente, se alcanzaron porcentajes de error según la norma energética menores al 0.5%,

lo que se considera muy adecuado. Además, los porcentajes de error experimental se situaron por debajo del 3%, entrando en un rango aceptable y mostrando una alta precisión en comparación con los resultados teóricos obtenidos de la gráfica de Peterson.

En la Tabla 9 del apéndice I, se presenta un análisis de la geometría corta en 2D con una división del *Working Plane* hacia el centro de la curva.

En las simulaciones 1 y 2, los resultados numéricos no mostraron proximidad con los valores teóricos, y los porcentajes de error según la norma energética no fueron aceptables. Estos resultados indican que la configuración inicial del modelo y el tamaño de elemento seleccionado no proporcionaron una aproximación adecuada a los valores teóricos esperados.

En las simulaciones 3 y 4, se observó una mejora con un porcentaje de error según la norma energética menor al 5%, lo que se considera aceptable. Sin embargo, los porcentajes de error experimental seguían siendo elevados, lo que sugiere que, aunque la calidad de la malla había mejorado, aún existían discrepancias significativas entre los resultados numéricos y los teóricos.

Las simulaciones 5 y 6 mostraron una mayor precisión en los resultados, con porcentajes de error según la norma energética menores al 1.5% y porcentajes de error experimentales por debajo del 5%. Aunque los valores de los esfuerzos estaban más cercanos a los teóricos, aún no coincidían perfectamente, indicando la necesidad de un refinamiento adicional en la malla o ajustes en el modelo.

En la simulación 7, los porcentajes de error tanto en la norma energética como en los resultados experimentales no alcanzaron niveles aceptables, lo que sugiere que el ajuste del modelo o del tamaño del elemento no fue suficiente para mejorar la precisión en esta etapa.

En la simulación 8, aunque se obtuvo un porcentaje de error aceptable según la norma energética y en el esfuerzo máximo no promediado de los elementos, el porcentaje de error experimental del esfuerzo máximo promediado en los nodos todavía se encontraba fuera de los rangos aceptables. Esto indica que, a pesar de las mejoras, aún había inconsistencias en la distribución de los esfuerzos en el modelo.

Finalmente, en las simulaciones 9 a 12, los porcentajes de error según la norma energética fueron menores al 0.5%, indicando una alta precisión en la calidad de la malla. Los porcentajes de error experimental se situaron por debajo del 4%, lo que se considera aceptable. Sin embargo, aunque estos resultados son mucho más cercanos a los teóricos obtenidos de la gráfica de Peterson, aún no alcanzan una coincidencia perfecta, sugiriendo la posibilidad de mejorar aún más la precisión con ajustes en el modelo de simulación.

En ambas tablas, se muestra que las últimas simulaciones demostraron que, con una malla adecuadamente refinada y el uso correcto de elementos finitos, es posible obtener resultados numéricos que coincidan de manera cercana con los valores teóricos.

En las Tablas 10 y 11 del apéndice I, se presentan los resultados de la geometría larga en 2D, utilizando una metodología similar a la aplicada en la geometría corta, respectivamente con las Tablas 8 y 9.

En cuanto a la Tabla 10, las simulaciones 1 y 2 tampoco muestran resultados dentro del rango aceptable, tanto en términos de la norma energética como del error experimental. Esto sugiere que las configuraciones iniciales del modelo parecen no ser las adecuadas para capturar con precisión los comportamientos esperados.

En las simulaciones 3 y 4, aunque se logró un porcentaje de error aceptable con la norma energética (menor al 5%), los porcentajes de error experimental siguieron siendo altos. La simulación 5 mostró una mejora notable, con un porcentaje de error en la norma energética dentro del rango aceptable y un porcentaje de error experimental del esfuerzo en los elementos también adecuado. Sin embargo, el porcentaje de error experimental del esfuerzo en los nodos aún se encontraba por encima del 5%, sugiriendo la necesidad de un refinamiento adicional.

En la simulación 7, se observó un comportamiento similar al de la simulación 5, con porcentajes de error en la norma energética y el esfuerzo en los elementos en rangos aceptables, pero con el error en los nodos aún fuera del rango deseado.

La simulación 8 presentó el caso, donde a pesar de tener un porcentaje de error aceptable respecto a la norma energética, los porcentajes de error experimental excedían el 5%. Este comportamiento

sugiere la necesidad de refinar el mallado utilizado en la simulación con el fin de reducir el porcentaje de error con respecto al valor teórico.

Finalmente, en las simulaciones 9 a 12, se lograron porcentajes de error en la norma energética menores al 0.5%, lo que indica una malla de alta calidad. Además, los porcentajes de error experimental se mantuvieron por debajo del 4%, lo que se considera aceptable. Aunque estos resultados son bastante cercanos a los teóricos, aún existe un margen para mejorar la precisión mediante técnicas adicionales de refinamiento de malla y ajustes en el modelo.

Para terminar con los datos de las geometrías bidimensionales, en la Tabla 11 se presenta nuevamente que las simulaciones 1 y 2 mostraron resultados fuera del rango aceptable y las simulaciones 3 y 4, aunque se logró un porcentaje de error aceptable con la norma energética, los porcentajes de error experimental continuaron siendo altos, similar a lo observado en las tablas anteriores.

Las simulaciones 5 y 6 también mostraron una mejora notable con ambos porcentajes de error encontrándose dentro de rangos aceptables, mientras que la simulación 7 tuvo un comportamiento similar a las simulaciones 1 y 2 con resultados fuera del rango aceptable, al igual que la simulación 8 que mostró un porcentaje de error aceptable con la norma energética pero los porcentajes de error experimentales seguían fuera del rango.

Nuevamente, de las simulaciones 9 a la 12, se lograron porcentajes de error con la norma energética menores al 0.3% indicando una alta calidad en la malla utilizada. En la Figura 5.1 se observa un acercamiento de la geometría con elementos de tamaño 0.01 para el *Working Plane* con división hacia el final de la curva, mientras que en la Figura 5.2 se observa dicha simulación con los rangos de esfuerzo a lo largo de la geometría.

Tras la evaluación minuciosa de las simulaciones anteriores, con base en los datos obtenidos de las tablas 8 a 11, se puede concluir que el tamaño de elemento óptimo para las simulaciones estructurales es aquel con valores menores a 0.1. Este tamaño de elemento tiende a producir un porcentaje de error con la norma energética menor al 5%, aunque esto no garantiza necesariamente que los esfuerzos obtenidos presenten un porcentaje de error experimental aceptable. En general,

los porcentajes de error experimental se encuentran dentro de rangos más certeros cuando el tamaño del elemento es menor a 0.025.

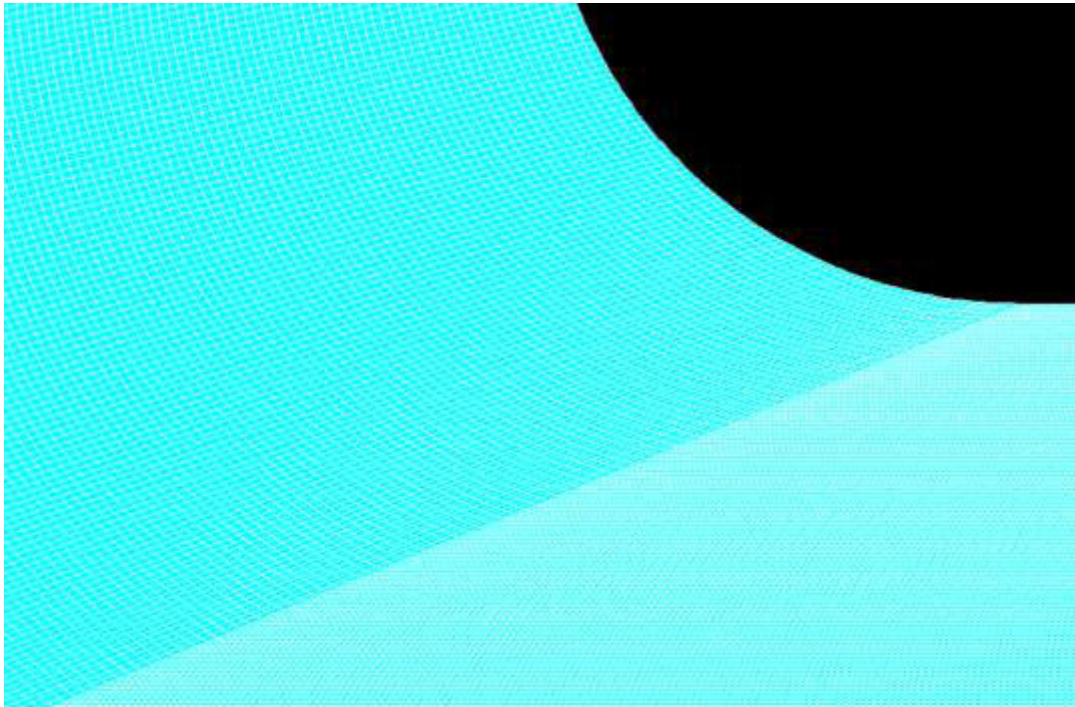


Figura 5.1. Geometría con mallado con elementos de un tamaño de 0.01.

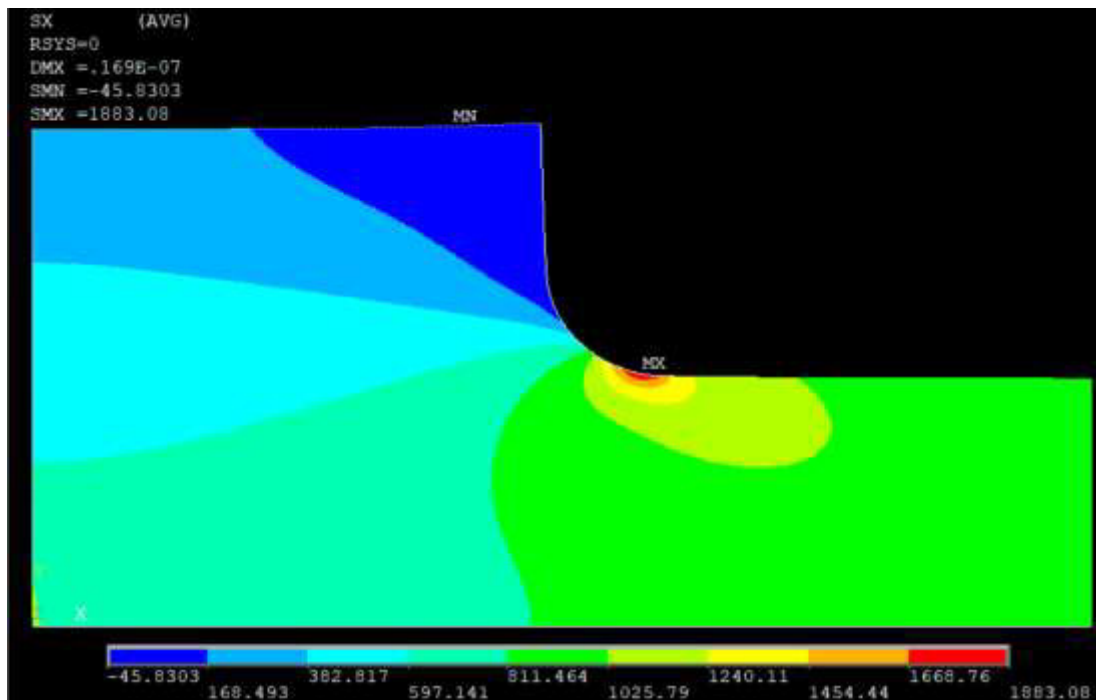


Figura 5.2. Resultados de la simulación 12.

Los resultados no son completamente precisos con respecto al valor teórico; sin embargo, los mejores resultados muestran una estabilidad en cuanto a ambos porcentajes de error. Esto se debe a que el proceso de análisis con geometrías bidimensionales ha sido fundamental para entender la comparativa de resultados. Utilizando la norma energética y variando el tamaño del elemento, se ha logrado obtener una mejor comprensión de la estabilidad y precisión de los resultados obtenidos. También ha permitido evaluar si existen diferencias significativas entre la geometría corta y la geometría larga, con el fin de seleccionar la más adecuada para un análisis tridimensional posterior.

Los resultados indican que no hay mucha diferencia entre los resultados obtenidos con la geometría corta y la geometría larga. Ambos tipos de geometría mostraron comportamientos similares en términos de porcentaje de error con la norma energética y el error experimental, sugiriendo que cualquiera de las dos geometrías podría ser utilizada para el análisis tridimensional sin que esto afecte significativamente la precisión de los resultados. En su lugar, estas variaciones simplemente resultaban en un aumento en el número de elementos, lo que equivale a un mayor tiempo de cómputo.

A la luz de este hallazgo, se tomó la decisión de simplificar el proceso y concentrarse en el modelo en 3D utilizando únicamente la longitud 1 (geometría corta) para ambas divisiones del *Working Plane*.

Al centrarse en una configuración más simplificada, se buscaba optimizar la eficiencia del análisis sin comprometer la precisión de los resultados. Esto permitiría reducir la complejidad del modelo, para optimizar el tiempo, y concentrar los recursos y esfuerzos en las áreas más relevantes del estudio, aumentando la calidad y la coherencia de los resultados obtenidos.

En la Tabla 12 del apéndice I, se presentan los resultados de las simulaciones realizadas con la geometría corta en 3D, utilizando una división del *Working Plane* hacia el *endpoint* de la curva.

En las simulaciones 1 a la 4, los resultados muestran una tendencia similar a la observada en las simulaciones bidimensionales. Sin embargo, en la simulación 5 se logró un porcentaje de error energético menor al 1.5% y un porcentaje de error experimental menor al 3.5%, lo cual se considera adecuado. En la simulación 6, debido a la gran cantidad de elementos utilizados, el

tiempo de cómputo fue significativamente mayor, lo que llevó a la decisión de detener la simulación.

En la simulación 7, se obtuvo un porcentaje de error experimental menor al 5% en el esfuerzo calculado en los elementos. En la simulación 8, tanto el porcentaje de error energético como el porcentaje de error experimental en los elementos fueron aceptables. Las simulaciones 9 y 10 mostraron porcentajes de error energético y experimental adecuados, aunque con la simulación 10 se tuvieron resultados extremadamente cercanos al valor teórico, con un esfuerzo de 1942 Pa en comparación con el valor teórico de 1940 Pa.

Desafortunadamente, en las simulaciones 11 y 12, nuevamente se presentaron tiempos de cómputo demasiado altos debido a la gran cantidad de elementos utilizados, lo que llevó a la decisión de detener las simulaciones.

En la Tabla 13 del apéndice I, se presentan los resultados de las simulaciones realizadas con la geometría corta en 3D, utilizando una división del *Working Plane* al centro de la curva. Los resultados muestran una tendencia similar a los observados en la Tabla 12, con algunas diferencias notables.

La simulación 8, a diferencia de la Tabla 12, presentó porcentajes de error experimentales adecuados también en el esfuerzo en los nodos, lo que representa una mejora significativa.

Las simulaciones 9 y 10 continuaron mostrando porcentajes de error energético y experimental adecuados. En particular, la simulación 10 obtuvo un esfuerzo de 1937 Pa, muy cercano al valor teórico de 1940 Pa, aunque ligeramente menor, contrastando con la Tabla 12 donde los valores fueron ligeramente superiores al teórico. En la Figura 5.3 se muestran la geometría con elementos de la simulación 10, mientras que en la Figura 5.4 se muestran los resultados de la simulación con su respectivo rango de valores de esfuerzo.

Nuevamente, las simulaciones 6, 11 y 12, presentaron tiempos de cómputo muy elevados, lo que llevó a la decisión de detener las simulaciones y evitar un uso excesivo de recursos computacionales.

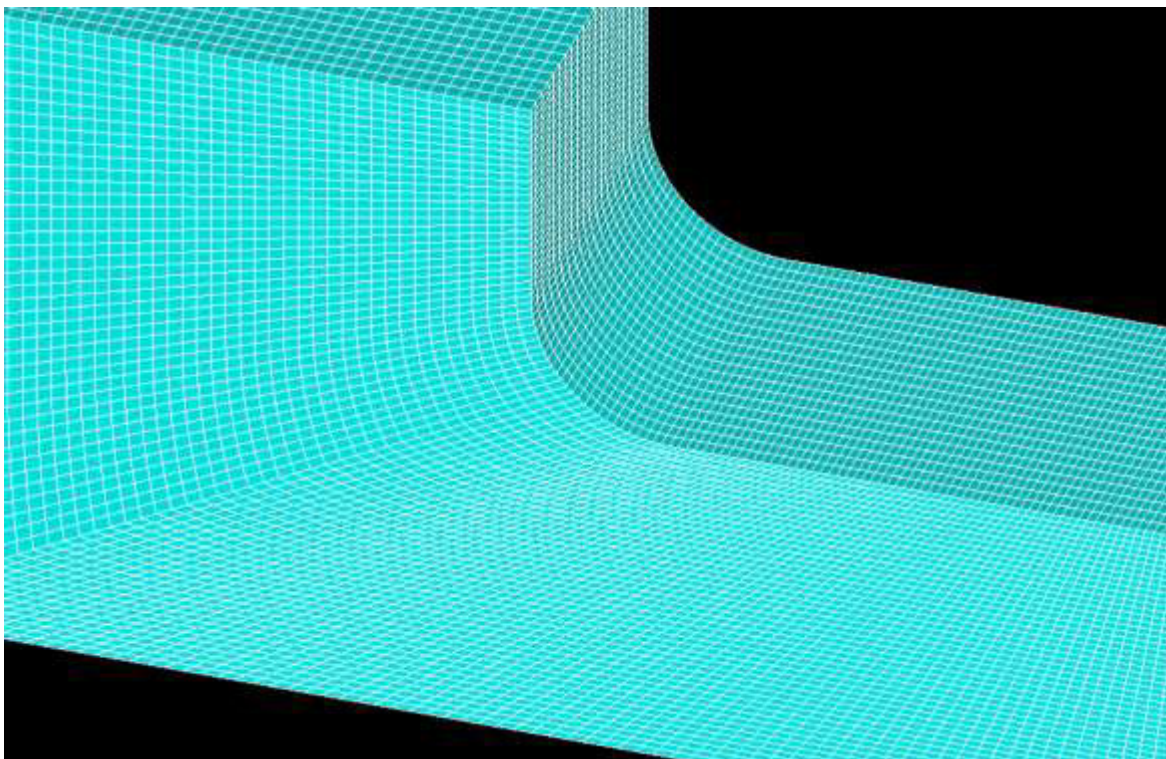


Figura 5.3. Geometría con mallado con elementos de un tamaño de 0.05.

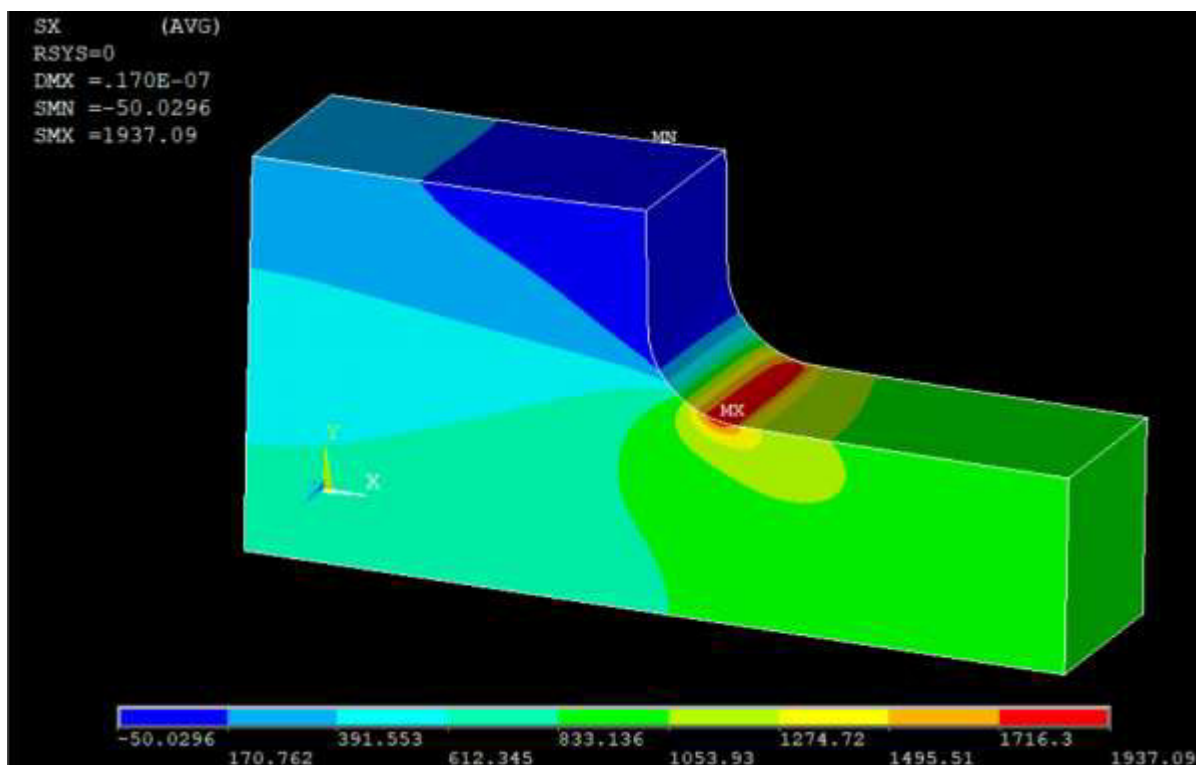


Figura 5.4. Resultados de la simulación 10, de la Tabla 12.

Al importar los mallados que no pudieron ser resueltos en ANSYS APDL hacia ANSYS Workbench, se observó que este otro software completó la simulación. Mientras que ANSYS APDL enfrentó dificultades para resolver algunos de estos mallados, ANSYS Workbench logró resolverlos sin problemas aparentes. Esta situación plantea preguntas relevantes sobre las capacidades de los diferentes programas de simulación y sus enfoques para resolver problemas de mallado estructural.

ANSYS APDL utiliza una interfaz basada en scripts que permite un control detallado sobre los parámetros del solver. Sin embargo, puede enfrentar limitaciones de memoria, especialmente en simulaciones complejas o con mallados muy densos. Este problema es evidente en los casos donde el programa no pudo asignar suficiente espacio de memoria para continuar con la simulación (siendo lo ocurrido en el caso de estudio). Mientras tanto, ANSYS Workbench ofrece una interfaz gráfica que optimiza la gestión de recursos y memoria de manera más eficiente.

Aunque ambos entornos utilizan los mismos solvers para análisis estructural, térmico y de fluidos, la diferencia en el rendimiento de Workbench optimiza el preprocesamiento y la asignación de recursos de manera más efectiva que APDL. Esto es particularmente relevante en simulaciones con grandes demandas computacionales.

Esta observación resalta la importancia de seleccionar el software de simulación más adecuado para el problema específico que se está abordando. Si bien ANSYS APDL es una herramienta robusta y ampliamente utilizada en la industria, puede haber situaciones en las que otros programas, como ANSYS Workbench, ofrezcan ventajas significativas en términos de capacidad de solución y eficiencia computacional.

También, es importante destacar que los valores más cercanos al teórico fueron obtenidos utilizando elementos cuadráticos y tamaños de elementos entre 0.25 y 0.05. En particular, el tamaño de elemento de 0.05 resultó ser el mejor en términos de precisión en los resultados. Intentar utilizar un tamaño de elemento menor no fue posible debido a las limitaciones computacionales, que resultaron en tiempos de cómputo excesivamente altos.

Este análisis ha proporcionado una comprensión más profunda de cómo el tamaño del elemento influye en la precisión de las simulaciones estructurales y ha sentado las bases para optimizar el proceso de mallado en futuros estudios tridimensionales.

En última instancia, estos hallazgos destacan la necesidad de explorar y comparar diferentes herramientas de simulación para determinar cuál es la más adecuada para las necesidades específicas de cada proyecto. La capacidad de resolver mallados complejos de manera efectiva es fundamental para obtener resultados precisos y significativos en el análisis estructural, y elegir el software adecuado desempeña un papel crucial en este proceso.

5.2 Análisis de los parámetros de mallado para una malla libre en ANSYS Workbench

Después de completar las simulaciones en ANSYS APDL y analizar los resultados obtenidos, se procedió a realizar simulaciones en ANSYS Workbench para llevar a cabo un mallado libre. En este proceso, se utilizó la misma geometría que en las simulaciones anteriores, pero se omitió la división del Working Plane, ya que el enfoque principal ahora era el mallado libre.

Como se mencionó en el capítulo anterior, después de realizar las 71 combinaciones, se aplicó un criterio de selección basado en el porcentaje de error obtenido en los resultados de simulación. Inicialmente, se seleccionaron aquellas combinaciones que demostraron un porcentaje de error menor al 5%, lo que redujo el número de opciones a 18 combinaciones. Sin embargo, para garantizar una mayor precisión en los resultados, se decidió refinar aún más el análisis, estableciendo un nuevo criterio optando por un porcentaje de error inferior al 1%.

Al aplicar este nuevo paso de filtrado, se identificaron finalmente 6 combinaciones que cumplían con el criterio de un porcentaje de error inferior al 1%. Estas combinaciones seleccionadas fueron consideradas para un análisis más detallado mediante un diseño factorial. Este enfoque permitirá examinar cómo diferentes configuraciones de parámetros interactúan entre sí y cómo influyen en los resultados de la simulación.

El diseño factorial se emplea para investigar el efecto de múltiples factores en una o varias respuestas cuando hay un interés en todos los factores involucrados. En muchos casos, el objetivo

principal es determinar la combinación óptima de niveles de factores que conduzca al mejor desempeño del proceso.

Estos factores pueden ser cualitativos, como diferentes máquinas, tipos de materiales u operadores, o cuantitativos, como temperatura, humedad o velocidad. Para comprender cómo cada factor influye en la variable de respuesta, es necesario seleccionar al menos dos niveles para cada uno de ellos. Con un diseño factorial completo, se ejecutan todas las combinaciones posibles de niveles de los factores de manera aleatoria.

En el contexto de este estudio, el diseño factorial se utilizará para analizar las 6 combinaciones seleccionadas de parámetros de mallado en ANSYS Workbench. Esto permitirá entender cómo cada parámetro y su interacción afectan los resultados de la simulación, ayudando así a determinar las configuraciones óptimas para generar mallas precisas y confiables.

La interpretación de la interacción entre factores es de vital importancia para comprender cómo influyen en la variable de respuesta y para acumular conocimiento sobre el sistema o proceso estudiado. Cuando se establece que una interacción entre dos factores tiene un efecto estadísticamente significativo en la respuesta, su interpretación toma precedencia sobre los efectos principales correspondientes, incluso si estos últimos también resultan significativos.

Los diseños factoriales son más eficientes que los experimentos tradicionales de cambiar un factor a la vez, ya que permiten estudiar tanto el efecto individual como el de interacción de los distintos factores. Además, estos diseños se pueden expandir para formar diseños compuestos [47] en caso de que se requiera una exploración más completa. Además, es factible realizar fracciones de diseños factoriales, las cuales son de gran utilidad en las fases iniciales de una investigación que aborda numerosos factores. Estas fracciones permiten descartar aquellos factores que resultan relevantes, antes de proceder con un estudio más detallado centrado en los factores que sí son importantes.

Por lo general, las representaciones visuales de los efectos principales y de interacción significativos son adecuadas para seleccionar el tratamiento óptimo del experimento. Estas representaciones ayudan a visualizar de manera más detallada, lo que facilita la toma de decisiones en el diseño estudiado.

El efecto de un factor se refiere al cambio que se observa en la variable de respuesta cuando se modifica el nivel de ese factor. Es una medida de la influencia directa que tiene ese factor sobre la variable de interés en el experimento.

Por otro lado, la interacción entre factores ocurre cuando el efecto de un factor sobre la variable de respuesta depende del nivel o la presencia de otro factor. En otras palabras, la manera en que un factor afecta la variable de respuesta puede variar según el nivel de otro factor presente en el experimento.

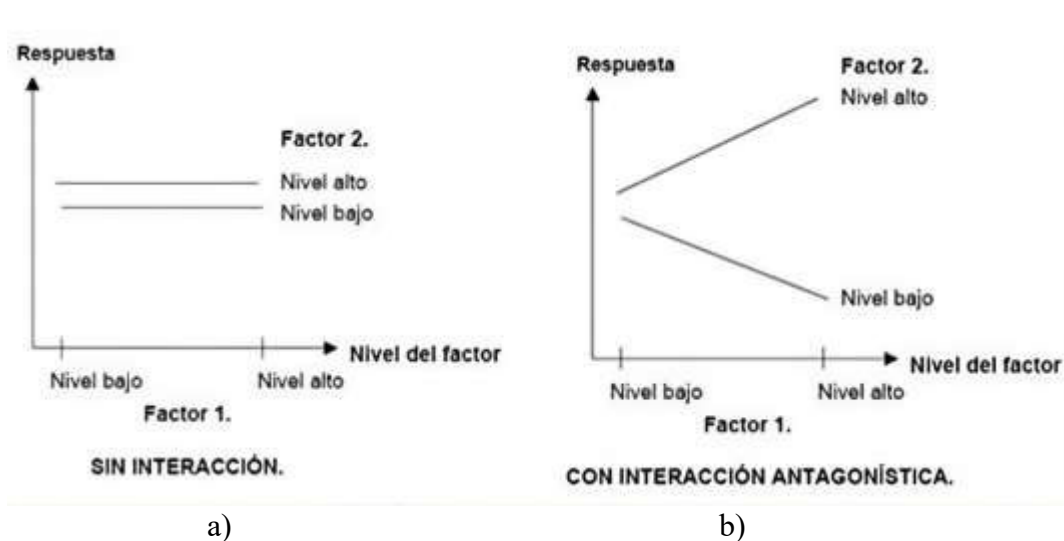
Entender y analizar los efectos de los factores y las interacciones entre ellos es fundamental para interpretar correctamente los resultados de un experimento factorial y tomar decisiones informadas sobre cómo manipular los factores para optimizar el resultado deseado. Mediante la identificación y comprensión de estos efectos, se pueden diseñar estrategias más efectivas para mejorar procesos, productos o sistemas en una amplia gama de áreas de investigación y aplicación.

En un diseño factorial, los factores pueden comportarse de diferentes maneras en relación con la variable de respuesta: algunos pueden actuar de manera independiente, otros pueden interactuar de manera antagonista, mientras que otros pueden interactuar de manera sinérgica.

- **Factores sin interacción (Figura 5.5a):** En este caso, el efecto de cada factor sobre la variable de respuesta es independiente de los niveles de los demás factores presentes en el experimento. En otras palabras, los efectos de los factores se suman o promedian, pero no se modifican entre sí. Por ejemplo, si un grupo de participantes realizan ejercicio de cardio, otro grupo realiza entrenamiento de fuerza, y otro grupo realiza tanto ejercicio de cardio como entrenamiento de fuerza, y después de un tiempo específico se miden las pérdidas de peso en cada grupo, se podría encontrar que los tres grupos muestran pérdida de peso significativas, lo que indica que no hay interacción entre el tipo de ejercicio y la pérdida de peso, ya que los tres grupos muestran un efecto similar independientemente de los tipos de ejercicios realizados.
- **Factores con interacción antagonista (Figura 5.5b):** En esta ocasión, la interacción entre los factores reduce el efecto total sobre la variable de respuesta en comparación con lo que se esperaría si los efectos de los factores fueran independientes. Es decir, la presencia de

un factor disminuye el efecto del otro factor sobre la variable de respuesta. Por ejemplo, en un estudio sobre el efecto del ejercicio físico y el consumo de cierto suplemento en la reducción del colesterol, se podría encontrar que el ejercicio por sí solo reduce significativamente los niveles del colesterol, pero se encuentra que el suplemento también tiene un efecto positivo en la reducción del colesterol, aunque no tan pronunciado como el ejercicio. Sin embargo, cuando los participantes realizan ejercicio regularmente, el efecto del suplemento parece disminuir, por lo tanto, aunque el suplemento tiene un efecto positivo, este efecto se reduce en presencia del ejercicio, lo que indica una interacción antagonista entre estos factores.

- **Factores con interacción sinérgica (Figura 5.5c):** En este caso, la interacción entre los factores aumenta el efecto total sobre la variable de respuesta en comparación con lo que se esperaría si los efectos de los factores fueran independientes. Es decir, la presencia de un factor aumenta el efecto del otro factor sobre la variable de respuesta. Por ejemplo, en un estudio sobre el efecto del ejercicio físico y comer de ciertos nutrientes en la pérdida de peso, se podría encontrar que el ejercicio físico aumenta significativamente la efectividad de los nutrientes para promover la pérdida de peso, lo que indica una interacción sinérgica entre estos factores.





c)

Figura 5.5. Tipos de interacción. a) Factores sin interacción, b) Factores con interacción antagonica y c) Factores con interacción sinérgica [74].

Con los factores y niveles definidos, se empleó el software Minitab para generar las 64 posibles combinaciones del diseño factorial completo. Una vez obtenidas todas las combinaciones, se llevaron a cabo las 64 simulaciones adicionales (Figura 5.6 Apéndice II) en ANSYS Workbench. Durante estas simulaciones, se registraron una serie de resultados fundamentales para cada configuración (Figura 5.7 Apéndice II), los cuales incluyeron:

- **Tiempo de mallado:** Este parámetro representó el tiempo necesario para generar la malla para cada simulación. Constituye una métrica importante para evaluar la eficiencia del proceso de mallado.
- **Tiempo de simulación:** Indicó el tiempo requerido para ejecutar la solución del sistema una vez se completó el mallado. Esta medida proporciona información sobre la complejidad computacional de cada configuración.
- **Valor mínimo y máximo del Jacobiano:** Este valor reflejó la distorsión de los elementos de la malla, siendo un indicador crucial de la calidad del mallado. Un valor máximo del Jacobiano excesivamente alto puede indicar problemas de calidad de la malla.
- **Desviación estándar de Jacobianos en todos los elementos:** Proporcionó una medida de la uniformidad de la malla en términos de distorsión. Una desviación estándar baja sugiere una malla más uniforme y de mayor calidad.

- **Esfuerzo máximo promediado y no promediado:** Estos valores representaron el esfuerzo máximo alcanzado en la simulación, tanto promediado como no promediado en la sección de interés. Son indicadores clave de la respuesta estructural del sistema bajo carga.
- **Porcentaje de error entre el esfuerzo de Peterson y el esfuerzo máximo promediado/no promediado:** Estos porcentajes de error proporcionaron información sobre la precisión de los resultados de la simulación en comparación con los valores teóricos de referencia obtenidos de la literatura.

La recopilación de estos resultados ofreció una visión detallada del rendimiento y la precisión de cada configuración de mallado. Este análisis permitió identificar las combinaciones óptimas de parámetros que garantizarían resultados precisos y eficientes para el problema de simulación abordado en este estudio.

Además de los resultados clave obtenidos de las 64 simulaciones, se registró la cantidad de nodos y elementos de cada simulación. Estas medidas cuantificaron la complejidad y la densidad de la malla generada para cada configuración. Una mayor cantidad de nodos y elementos puede mejorar la precisión de la simulación, pero también aumentar el costo computacional asociado.

En la Figura 5.8 se presenta la geometría discretizada de una de las 64 simulaciones identificadas en este estudio. En esta figura se ilustra la configuración de malla libre tetraédrica, detallando la distribución de la misma.

En la Figura 5.9 se muestra el resultado de la simulación correspondiente a esta configuración de malla donde se observa el rango de esfuerzos obtenidos en el modelo. El máximo esfuerzo proporcionado es el esfuerzo máximo no promediado confirmando que se encuentra dentro del límite esperado, según el valor teórico obtenido de la gráfica de Peterson.

En la Tabla 14 del apéndice II, se presenta una tabla que recopila estos valores para cada simulación. Al analizar los datos, se observó que existían varias simulaciones con la misma cantidad de nodos y elementos, así como otras donde se obtuvieron valores muy cercanos. Para facilitar la interpretación de estos resultados, se decidió agrupar las diferentes cantidades por colores, donde los valores idénticos fueron asignados al mismo color.

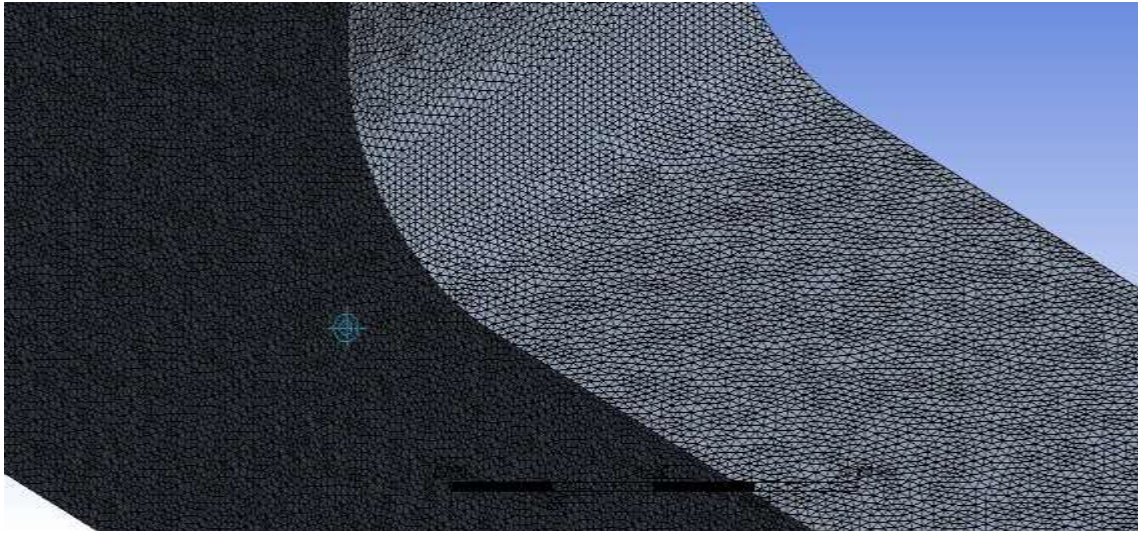


Figura 5.8. Ejemplo de geometría discretizada con mallado libre tetraédrico.

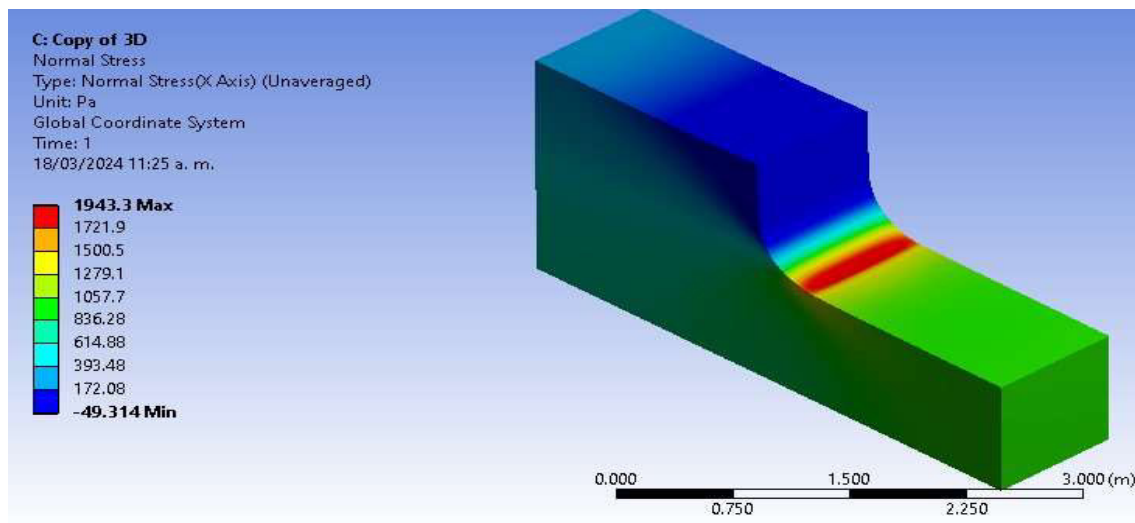


Figura 5.9. Ejemplo de simulación con mallado libre tetraédrico.

Esta representación visual permitió identificar patrones y tendencias en la distribución de nodos y elementos entre las simulaciones. La agrupación por colores resaltó áreas donde se produjeron cambios significativos en la complejidad del modelo, lo que podría indicar la presencia de configuraciones distintas que requieren una atención especial en el análisis.

La combinación de estos datos con las gráficas de efectos principales y de interacción permitió obtener una visión integral del impacto de los diferentes parámetros en la complejidad del modelo

y en los resultados de las simulaciones. Este enfoque integrado proporcionó una comprensión más profunda de cómo cada parámetro afectaba la calidad de la malla y los resultados del análisis.

Identificar los parámetros más significativos e influyentes fue fundamental para el diseño de experimentos más eficaz y la optimización de los procesos de simulación. Al comprender cómo cada parámetro afectaba los resultados finales, fue posible ajustar y afinar los ajustes del mallado para mejorar la precisión y la eficiencia de las simulaciones.

Además, este enfoque permitió identificar posibles áreas de mejora y optimización en el proceso de mallado, lo que proporcionó una base sólida para futuras investigaciones y desarrollos en el campo de la simulación numérica. En última instancia, la combinación de análisis de datos y visualización permitió obtener información valiosa que contribuyó significativamente a la comprensión y mejora de los procesos de simulación en este estudio específico.

El análisis de los resultados obtenidos de las 64 simulaciones adicionales en ANSYS Workbench proporcionó una comprensión detallada de cómo los diferentes parámetros influyen en los resultados del estudio. Se generaron gráficas que representaban los efectos principales de cada factor, así como las interacciones entre diferentes factores.

Las gráficas factoriales generadas permitieron identificar las interacciones entre los factores y sus niveles respectivos. Al analizar dichas gráficas de efectos principales, se observó que ciertos factores tenían un impacto significativo en los resultados del análisis.

Además, al examinar las interacciones entre los factores, se revelaron relaciones complejas que podrían no haber sido evidentes de otra manera. Es importante destacar que, si bien algunas interacciones entre factores fueron significativas, también se observaron casos donde los efectos principales de los factores dominaban sobre las interacciones. Esto sugiere que, si bien las interacciones pueden influir en los resultados, los efectos individuales de los factores siguen siendo importantes y deben considerarse al diseñar y analizar experimentos.

Después de presentar las gráficas de efectos principales y de interacción, se realizó un análisis cuantitativo utilizando el valor p como dato estadístico clave para evaluar la significancia de cada efecto o interacción. Este enfoque permitió identificar qué efectos eran estadísticamente

significativos y cuáles no, proporcionando una comprensión más detallada entre los factores estudiados.

En la Figura 5.10, se puede observar claramente que el tamaño de elemento, la razón de crecimiento y la transición suave son los parámetros que tienen un efecto significativo en los resultados de las simulaciones. Por otro lado, el ángulo característico, la curvatura normal y el refinamiento no parecen tener influencia alguna en los resultados.

Al determinar que el tamaño de elemento, la razón de crecimiento y la transición suave son los factores más influyentes, se puede dedicar más atención a la configuración y ajuste de estos parámetros para mejorar la calidad y precisión de las simulaciones. Por otro lado, los parámetros con una influencia mínima pueden ser ajustados de manera menos rigurosa o incluso mantenerse constantes en futuros análisis, lo que simplifica el proceso de simulación sin comprometer la precisión de los resultados.

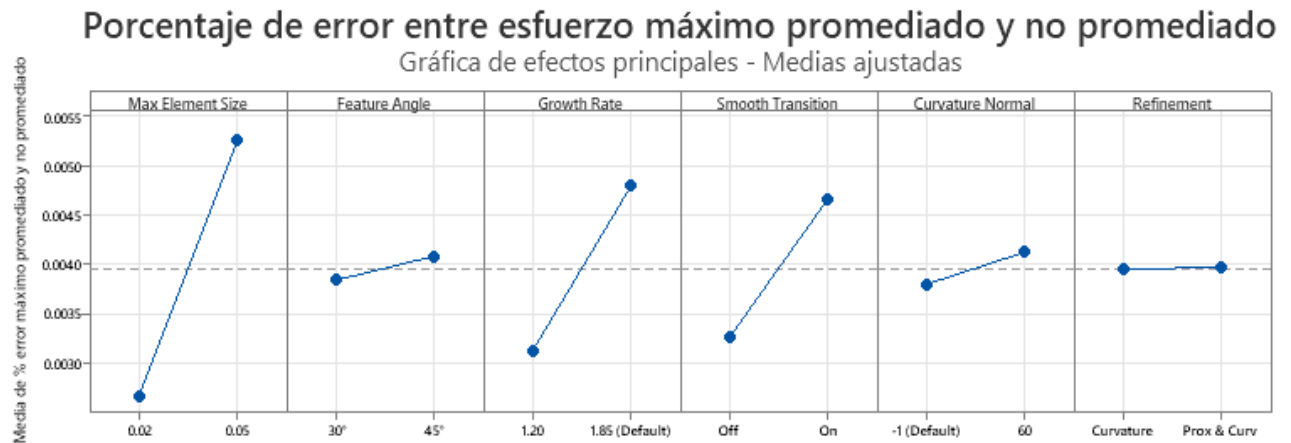


Figura 5.10. Efectos principales del porcentaje de error entre el esfuerzo máximo promediado y el esfuerzo máximo no promediado.

El análisis de la gráfica de interacción del esfuerzo máximo promediado versus el esfuerzo máximo no promediado (Figura 5.11) reveló una serie de interacciones significativas entre diferentes parámetros. Se observó una interacción entre el tamaño del elemento y el ángulo característico, entre el tamaño del elemento y la razón de crecimiento, y entre el tamaño del elemento y la transición suave. Además, se identificó una interacción entre la razón de crecimiento y la transición suave.

Estos hallazgos sugieren que ajustar el tamaño del elemento puede tener un impacto significativo en cómo otros parámetros influyen en los resultados del análisis.

Sin embargo, se observó que las líneas en las gráficas de interacción de los parámetros restantes se superponen en gran medida, lo que sugiere una interacción menor o nula entre ellos. Esta falta de interacción podría deberse a que estos parámetros tienen efectos independientes en los resultados del análisis y no interactúan de manera significativa entre sí.

Una excepción notable fue la gráfica del ángulo característico versus la razón de crecimiento, así como la del ángulo característico versus la transición suave, donde las líneas se mostraron claramente separadas y ligeramente paralelas. Esto indica que estos parámetros no influyen en absoluto entre ellos.

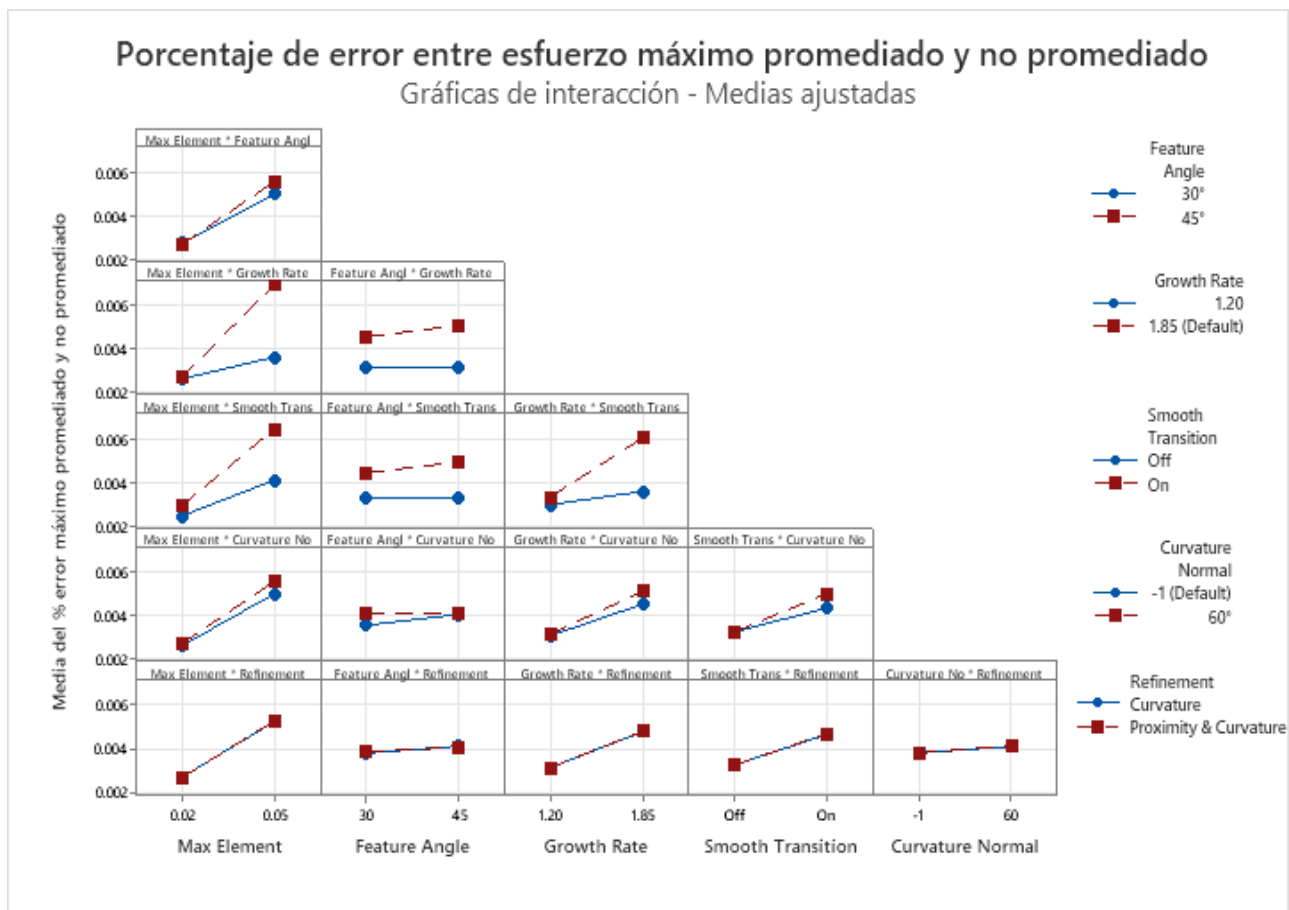


Figura 5.11. Interacción entre parámetros para el análisis del porcentaje de error entre el esfuerzo máximo promediado y el esfuerzo máximo no promediado.

La influencia del parámetro de la transición suave se destaca claramente en la gráfica de efectos principales (Figura 5.12), mostrando una marcada diferencia en los resultados en función de sus niveles. Esta observación sugiere que la configuración de la transición suave puede tener un impacto significativo en la precisión y la coherencia de los resultados del análisis. Es probable que una transición suave optimizada conduzca a una distribución más uniforme de los esfuerzos en la malla, lo que contribuye a resultados más precisos y confiables.

Además, se encontró una influencia ligeramente menor pero aún notable en la razón de crecimiento, el ángulo característico y la curvatura normal. Estos parámetros también parecen desempeñar un papel importante en la determinación de los esfuerzos máximos obtenidos en el análisis. Aunque su impacto puede no ser tan pronunciado como el de la transición suave, ajustar estos parámetros puede contribuir significativamente a la mejora de la precisión de los resultados.

Por otro lado, se puede observar que el tamaño del elemento y el refinamiento mostraron efectos prácticamente horizontales en la gráfica, lo que sugiere que estos parámetros tienen una influencia mínima o nula en los resultados de las simulaciones. Es posible que el tamaño del elemento y el refinamiento no sean críticos para capturar con precisión el comportamiento del sistema en este contexto específico.

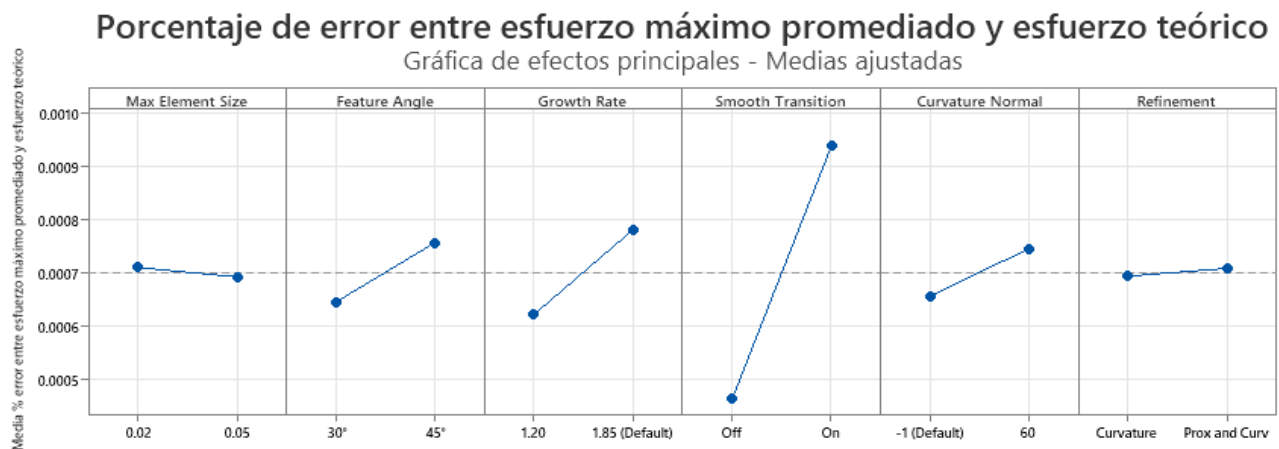


Figura 5.12. Efectos principales del porcentaje de error entre el esfuerzo máximo promediado y el esfuerzo teórico.

En la gráfica de interacción (Figura 5.13), se revela una influencia significativa entre el tamaño del elemento y la transición suave, lo que sugiere que estos dos parámetros interactúan de manera

notable en los resultados de las simulaciones. Esta relación indica que ajustar la transición suave junto con el tamaño del elemento puede ser crucial para garantizar una distribución uniforme de la malla.

Además, se identificó una influencia menor pero aún notable entre el tamaño del elemento y el ángulo característico, entre el tamaño del elemento y la razón de crecimiento, así como entre el tamaño del elemento y la curvatura normal. Estas relaciones destacan la importancia de considerar múltiples parámetros simultáneamente al ajustar el tamaño del elemento.

Se observó una interacción entre el ángulo característico y la razón de crecimiento, aunque ésta fue ligeramente menos pronunciada que otras interacciones. Esto indica que, si bien estos parámetros pueden afectar los resultados de manera conjunta, su influencia puede ser menos significativa en comparación con otras combinaciones. Del mismo modo, se notó una influencia menor entre el ángulo característico y la curvatura normal, así como entre la razón de crecimiento y la curvatura normal.

Por otro lado, los demás parámetros mostraron líneas prácticamente superpuestas en la gráfica de interacción, lo que sugiere una interacción mínima entre ellos. Sin embargo, se destacó una separación significativa entre el ángulo característico y la transición suave, así como entre la razón de crecimiento y la transición suave, indicando que no tienen interacción alguna al encontrarse prácticamente paralelas.

Al analizar los efectos principales de los parámetros para el porcentaje de error entre el esfuerzo máximo no promediado y el esfuerzo teórico (Figura 5.14), se destaca que el tamaño del elemento exhibe una influencia significativa en los resultados de las simulaciones. Esto sugiere que cambios en el tamaño del elemento tienen un impacto considerable en la precisión y calidad de los resultados obtenidos. La variación en el tamaño del elemento puede afectar directamente la resolución de la malla, y, por lo tanto, la precisión de la representación del modelo físico en el análisis numérico.

Además, se observa que tanto la razón de crecimiento como la transición suave muestran una influencia media en los resultados. Aunque no tan pronunciada como la del tamaño del elemento, aún son parámetros que tienen un efecto notable en el proceso de simulación. La razón de

crecimiento afecta la densidad de la malla y puede influir en la precisión de la representación del modelo, especialmente en áreas con cambios bruscos en la geometría. Por otro lado, la transición suave influye en la suavidad de la transición entre diferentes regiones de la malla, lo que puede afectar la precisión de los resultados al evitar discontinuidades o distorsiones inesperadas.

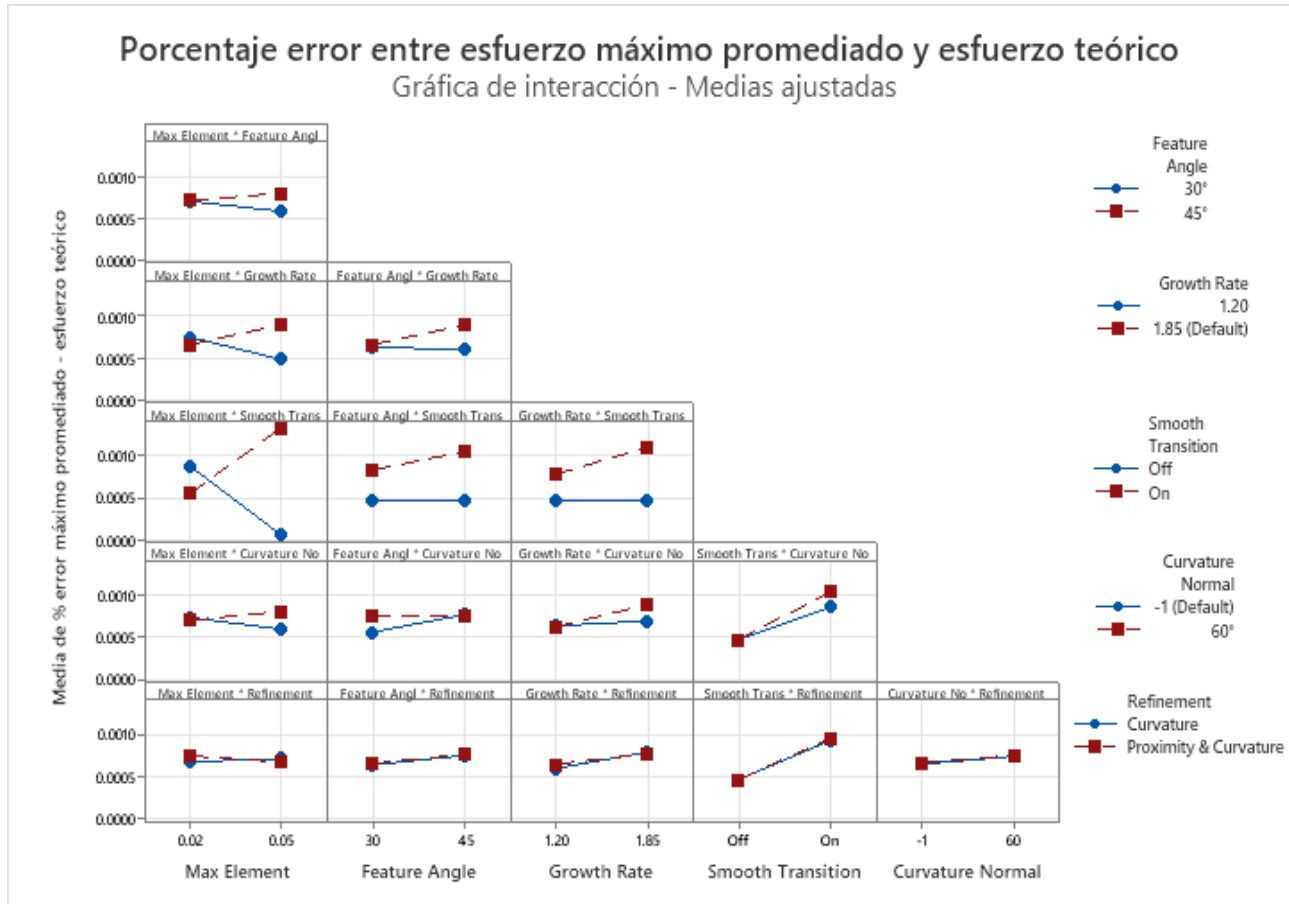


Figura 5.13. Interacción entre parámetros para el análisis del porcentaje de error entre el esfuerzo máximo promediado y el esfuerzo teórico.

En contraste, el ángulo característico, la curvatura normal y el refinamiento se encuentran prácticamente horizontales en la gráfica. Esto indica que estos parámetros tienen una influencia mínima o nula en los resultados de las simulaciones, al menos en el rango de valores estudiados. Esto sugiere que, para el problema específico abordado en este estudio, ajustar estos parámetros dentro del rango de valores analizados no produce cambios significativos en los resultados del análisis.

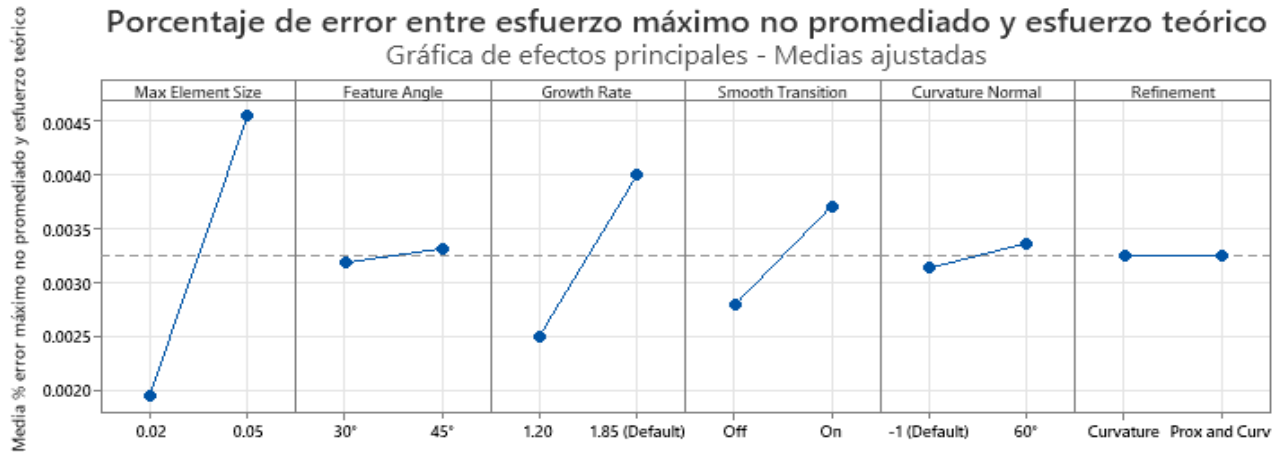


Figura 5.14. Efectos principales del porcentaje de error entre el esfuerzo máximo no promediado y el esfuerzo teórico.

En la gráfica de interacción (Figura 5.15), se destaca una interacción entre el tamaño del elemento y la razón de crecimiento, lo que sugiere que estos dos parámetros tienen un efecto combinado en los resultados de las simulaciones. Esta interacción podría ser el resultado de cómo el tamaño del elemento y la razón de crecimiento afectan la densidad y distribución de la malla en diferentes regiones del modelo. Por ejemplo, un tamaño del elemento más grande combinado con una alta razón de crecimiento puede resultar en una malla más dispersa en áreas menos críticas del modelo, lo que podría afectar la precisión de los resultados en esas regiones.

Además, se identificó una interacción ligera entre la razón de crecimiento y la transición suave, así como entre la transición suave y la curvatura normal. Estas interacciones indican que, aunque menos pronunciadas, estos parámetros también tienen una influencia conjunta en los resultados de las simulaciones. La razón de crecimiento y la transición suave pueden trabajar juntas para determinar cómo se ajusta la densidad de la malla en áreas con cambios bruscos en la geometría, mientras que la transición suave y la curvatura normal pueden afectar la suavidad y precisión de la malla en áreas con curvaturas variables.

Por otro lado, los demás parámetros mostraron líneas prácticamente superpuestas en la gráfica de interacción, lo que sugiere que no tienen una influencia conjunta distintiva en los resultados de las simulaciones. Sin embargo, se destacan algunos parámetros representados por líneas separadas y paralelas en la gráfica, lo que indica que no tienen una influencia conjunta distintiva en los resultados de las simulaciones. Estos parámetros son el tamaño del elemento con la transición

suave, el ángulo característico con la razón de crecimiento, el ángulo característico con la transición suave, el ángulo característico con la curvatura normal y la razón de crecimiento con la curvatura normal.

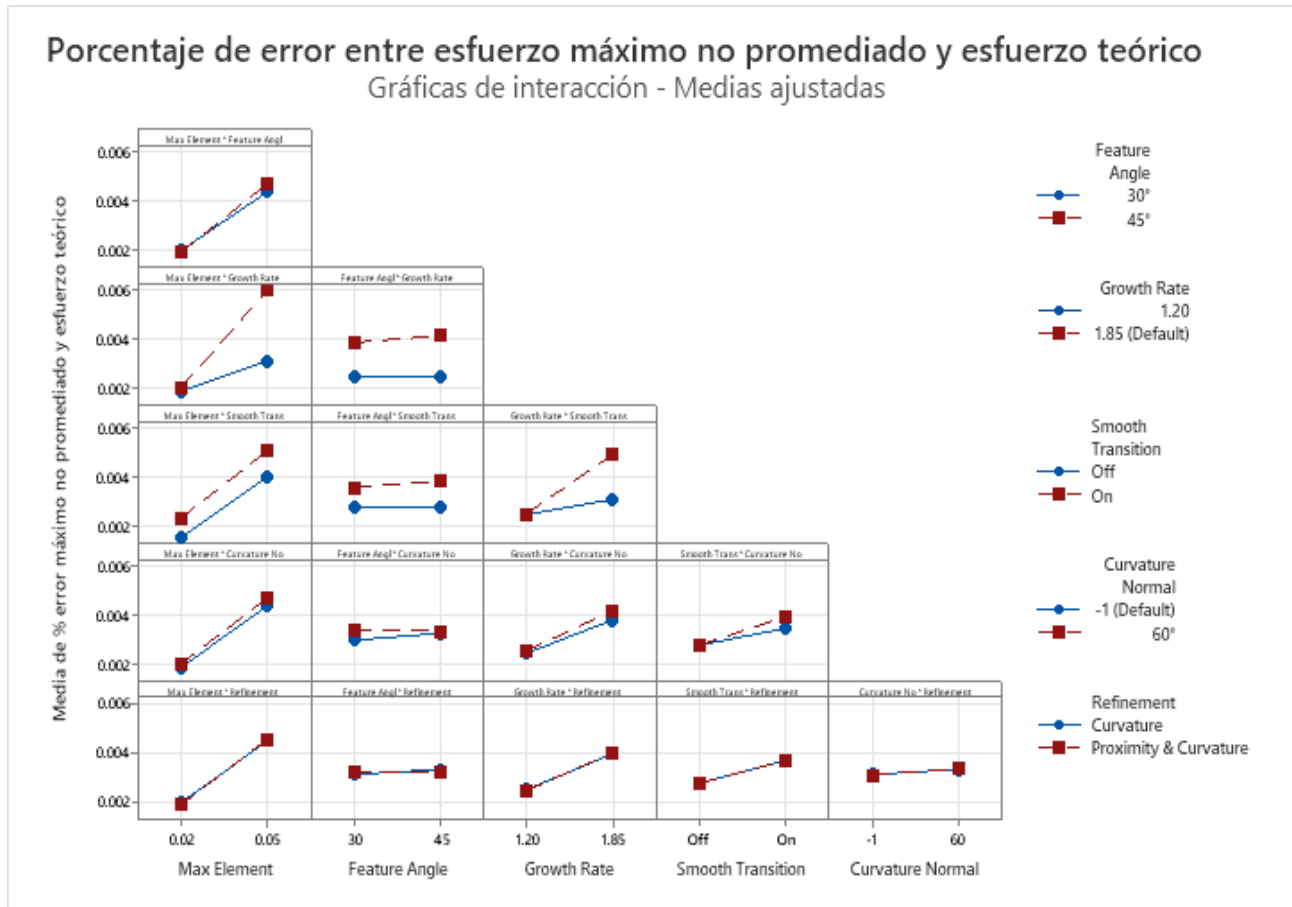


Figura 5.15. Interacción entre parámetros para el análisis del porcentaje de error entre el esfuerzo máximo no promediado y el esfuerzo teórico.

En la gráfica de efectos principales para el tiempo de mallado (Figura 5.16), se destaca claramente un efecto muy grande asociado con el tamaño del elemento. Es decir, variaciones en el tamaño del elemento afectan considerablemente la precisión y calidad de los resultados obtenidos. Un tamaño del elemento adecuado puede ayudar a capturar de manera eficiente los detalles importantes del modelo, mientras que un tamaño inadecuado puede conducir a errores significativos en las predicciones del análisis.

Además, se observa un efecto ligero en la transición suave y el refinamiento. Aunque no tan pronunciado como el efecto del tamaño del elemento, esto indica que estos parámetros también tienen una influencia notable en el proceso de simulación.

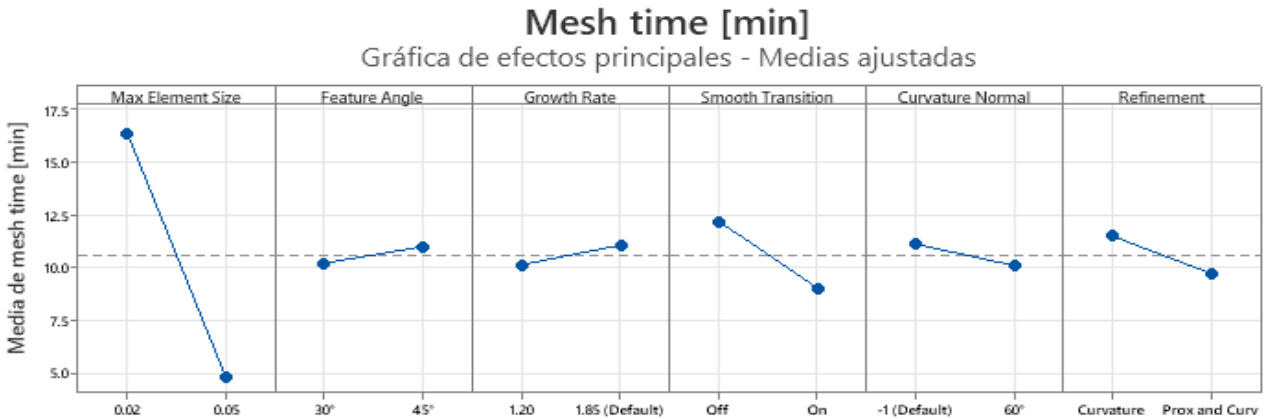


Figura 5.16. Efectos principales para el tiempo de mallado.

En contraste, los demás parámetros muestran prácticamente una línea horizontal en la gráfica. Esto sugiere que estos parámetros tienen un efecto mínimo o nulo en los resultados de las simulaciones dentro del rango de valores estudiados. Es decir, cambios en estos parámetros tienen poco impacto en la precisión o calidad de los resultados.

Al analizar la siguiente gráfica de interacción (Figura 5.17), se observan varias interacciones notables entre diferentes pares de parámetros del modelo. Se destaca una interacción significativa entre el tamaño del elemento y el ángulo característico, la razón de crecimiento y la curvatura normal. Esto sugiere que cambios en el tamaño del elemento tienen un impacto considerable en estos parámetros y, por lo tanto, en los resultados de las simulaciones.

Además, se identifican interacciones notables entre el ángulo característico y la razón de crecimiento, así como entre el ángulo característico y la curvatura normal. De manera similar, se observa una interacción entre la razón de crecimiento y la curvatura normal, así como entre la transición suave y la curvatura normal. Estas interacciones indican que estos pares de parámetros tienen una influencia conjunta en los resultados de las simulaciones. Por ejemplo, cambios en el ángulo característico pueden afectar la manera en que se generan los elementos de la malla, lo que a su vez puede influir en la razón de crecimiento y la curvatura normal de la malla generada.

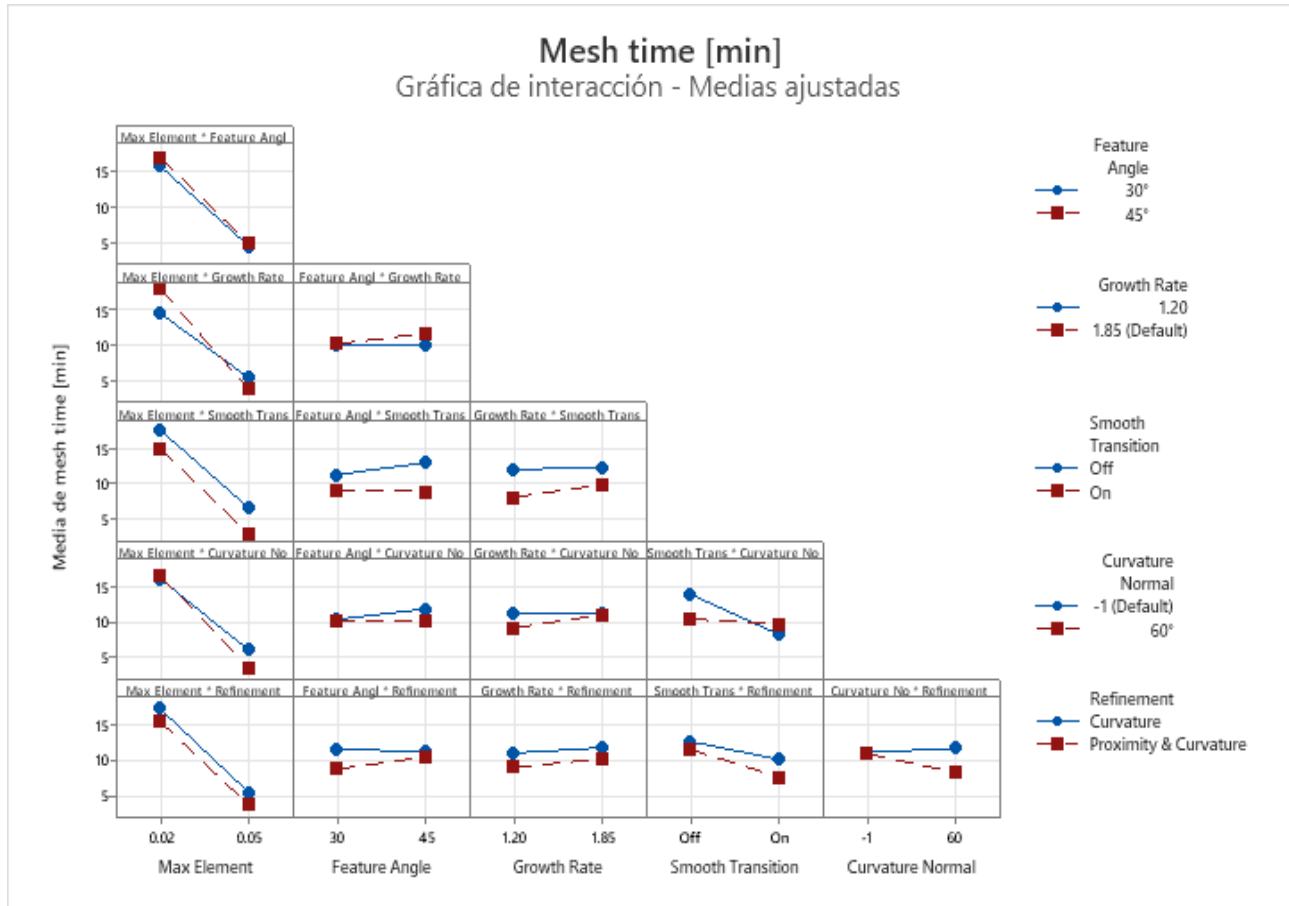


Figura 5.17. Interacción entre parámetros para el tiempo de mallado.

Por otro lado, se aprecia que los demás parámetros están claramente separados y prácticamente paralelos en la gráfica, lo que sugiere que no presentan interacción alguna entre ellos. Esto implica que estos parámetros tienen un efecto independiente y no interactúan significativamente en el proceso de simulación dentro del rango de valores estudiados.

Al examinar la siguiente gráfica de efectos principales (Figura 5.18), se destaca claramente un efecto muy grande asociado con el tamaño del elemento. Además, se observa un efecto considerable en la transición suave, aunque ligeramente menor que el efecto del tamaño del elemento. Esto sugiere que la transición suave también es un parámetro importante que afecta los resultados de las simulaciones, aunque en menor medida que el tamaño del elemento.

En contraste, los demás parámetros muestran líneas prácticamente horizontales en la gráfica. Esto indica que estos parámetros tienen un efecto mínimo o nulo en los resultados de las simulaciones.

dentro del rango de valores estudiados. Es decir, cambios en estos parámetros, como el ángulo característico, la curvatura normal y el refinamiento, tienen poco impacto en la precisión o calidad de los resultados.

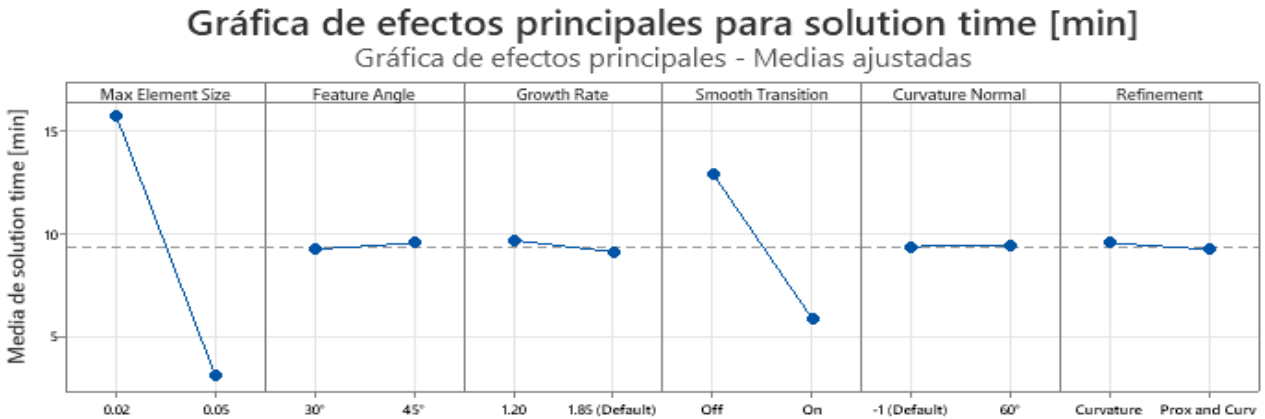


Figura 5.18. Efectos principales para el tiempo de solución.

En cuanto a la siguiente gráfica de interacción (Figura 5.19), se destacan tres interacciones donde las líneas están separadas y prácticamente paralelas, lo que sugiere una falta de interacción entre estos pares de parámetros.

En primer lugar, se nota una separación entre el tamaño del elemento y la transición suave, lo que indica que estos dos parámetros no tienen una interacción significativa en los resultados de las simulaciones. Lo mismo ocurre con el ángulo característico y la transición suave, así como con la razón de crecimiento y la transición suave. Estas interacciones sugieren que estos pares de parámetros no influyen mutuamente en los resultados de las simulaciones dentro del rango de valores estudiados.

Por otro lado, se observa que el resto de las interacciones entre los parámetros muestran líneas superpuestas, lo que indica una posible interacción entre ellos. Esto sugiere que estos pares de parámetros podrían influirse mutuamente en los resultados de las simulaciones.

Al examinar la gráfica de efectos principales del Jacobiano (Figura 5.20), se destaca un efecto muy grande asociado con la transición suave. Esto sugiere que cambios en la transición suave tienen un impacto considerable en la calidad y la distorsión de los elementos de la malla, como indica el valor del Jacobiano.

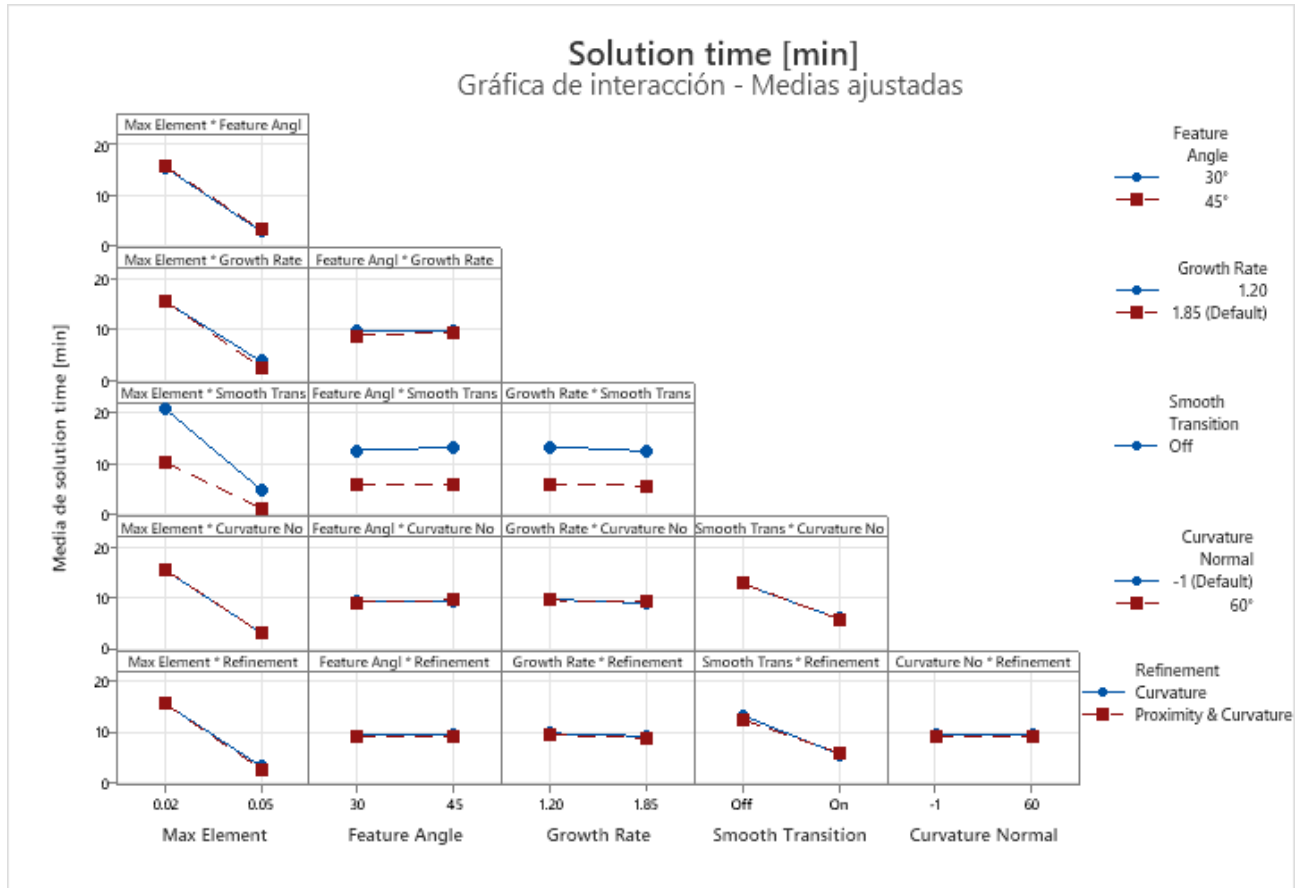


Figura 5.19. Interacción entre parámetros para el tiempo de solución.

Además, se observa que el efecto del tamaño del elemento y la razón de crecimiento también son grandes, aunque no tanto como el efecto de la transición suave. Esto indica que estos dos parámetros tienen una influencia notable en los resultados del Jacobiano, pero son ligeramente menos significativos que la transición suave. Variaciones en el tamaño del elemento y la razón de crecimiento pueden afectar la distorsión de los elementos de la malla, aunque en menor medida que la transición suave.

En contraste, los demás parámetros muestran líneas prácticamente horizontales en la gráfica. Esto sugiere que estos parámetros tienen un efecto mínimo o nulo en los resultados del Jacobiano dentro del rango de valores estudiados.

Al analizar la gráfica de interacción (Figura 5.21), se destaca una interacción notable entre el tamaño del elemento y la razón de crecimiento, lo que sugiere que estos dos parámetros tienen un efecto combinado significativo en los resultados de las simulaciones. Sin embargo, se observa que

los demás parámetros muestran líneas prácticamente superpuestas en la gráfica, lo que indica que no hay una interacción clara entre ellos. Esto sugiere que estos pares de parámetros podrían o no influir mutuamente en los resultados de las simulaciones dentro del rango de valores estudiados.

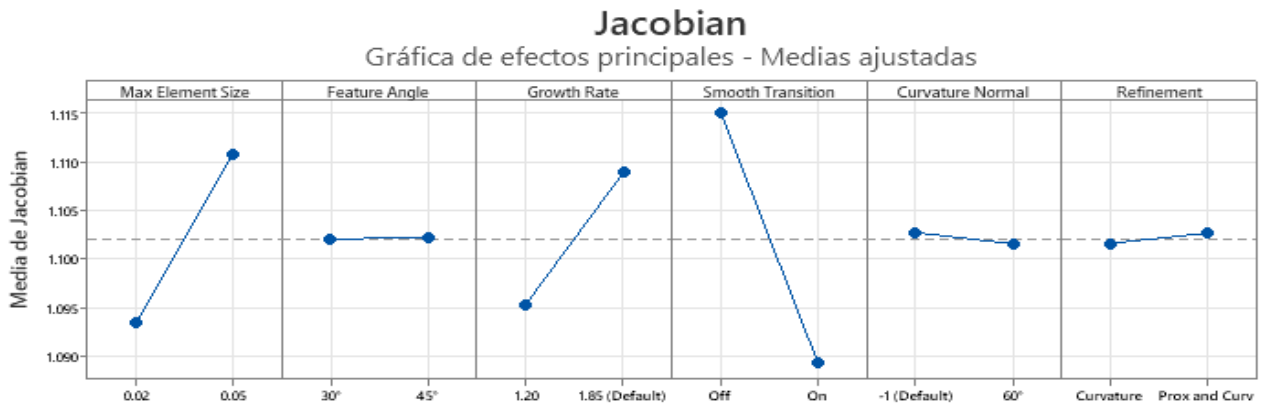


Figura 5.20. Efectos principales para valor Jacobiano.

Además, se identifica una separación entre el tamaño del elemento y la transición suave, el ángulo característico y la razón de crecimiento, así como entre el ángulo característico y la transición suave, y entre la razón de crecimiento y la transición suave. Estas interacciones sugieren que estos pares de parámetros no tienen una influencia conjunta en los resultados de las simulaciones y, por lo tanto, no tienen interacción entre sí.

Al analizar la gráfica de efectos principales de la desviación estándar (Figura 5.22), se observa claramente que el tamaño del elemento tiene un efecto muy grande en los resultados. Esto sugiere que cambios en el tamaño del elemento tienen un impacto significativo en la variabilidad de los resultados de las simulaciones, medida a través de la desviación estándar. Cuando el tamaño del elemento varía, se produce una variación notable en la calidad y precisión de la malla generada, lo que se refleja en la desviación estándar de los resultados.

Además, se observa que tanto la razón de crecimiento como la transición suave muestran un efecto ligeramente menor en comparación con el tamaño del elemento. Aunque estos dos parámetros también tienen un efecto notable en la variabilidad de los resultados, son un poco menos significativos que el tamaño del elemento.

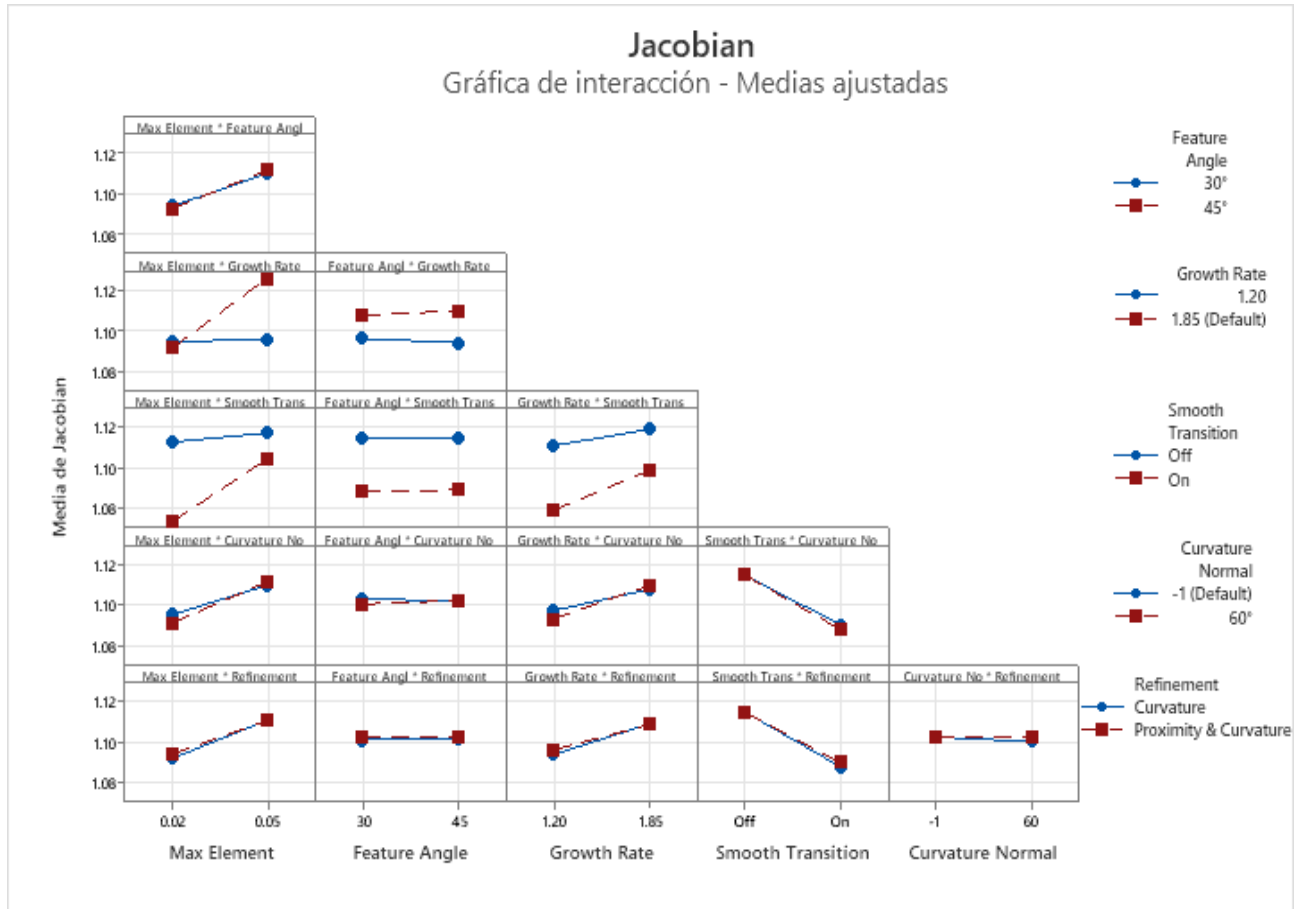


Figura 5.21. Interacción entre parámetros para el valor Jacobiano.

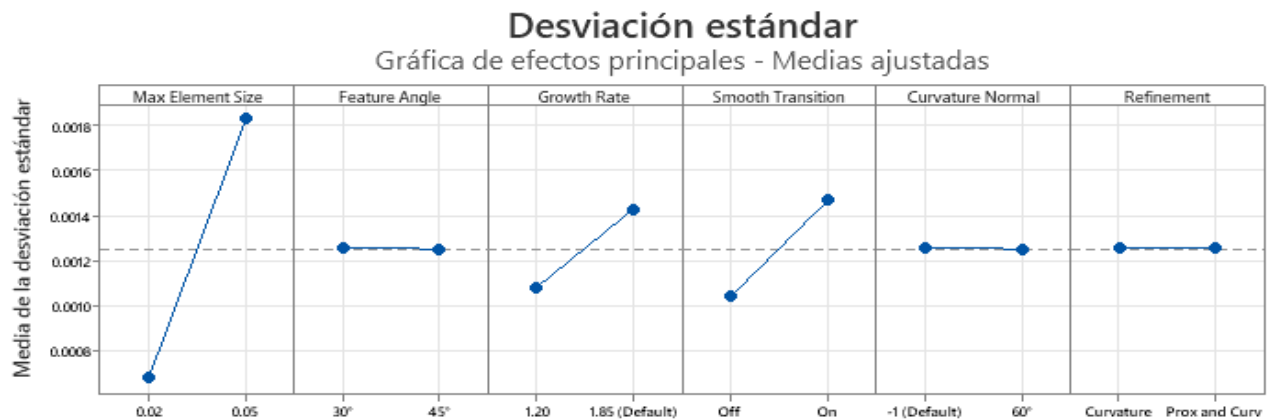


Figura 5.22. Efectos principales para la desviación estándar de los valores Jacobianos.

Al analizar la gráfica de interacción de la desviación estándar (Figura 5.23), se destaca una interacción notable entre el tamaño del elemento y la razón de crecimiento, así como entre el tamaño del elemento y la transición suave. Estas interacciones sugieren que estos dos pares de

parámetros tienen un efecto combinado significativo en la variabilidad de los resultados de las simulaciones. Cuando se modifica tanto el tamaño del elemento como la razón de crecimiento o la transición suave, se produce una influencia conjunta en la variabilidad de los resultados, medida a través de la desviación estándar. Esto indica que estos parámetros están relacionados de manera compleja y afectan la consistencia de los resultados de las simulaciones cuando se consideran en conjunto.

Por otro lado, se observa que los demás parámetros muestran líneas prácticamente superpuestas en la gráfica, lo que indica que no hay una interacción clara entre ellos. Esto sugiere que estos pares de parámetros pueden o no influir mutuamente en la variabilidad de los resultados de las simulaciones dentro del rango de valores estudiados.

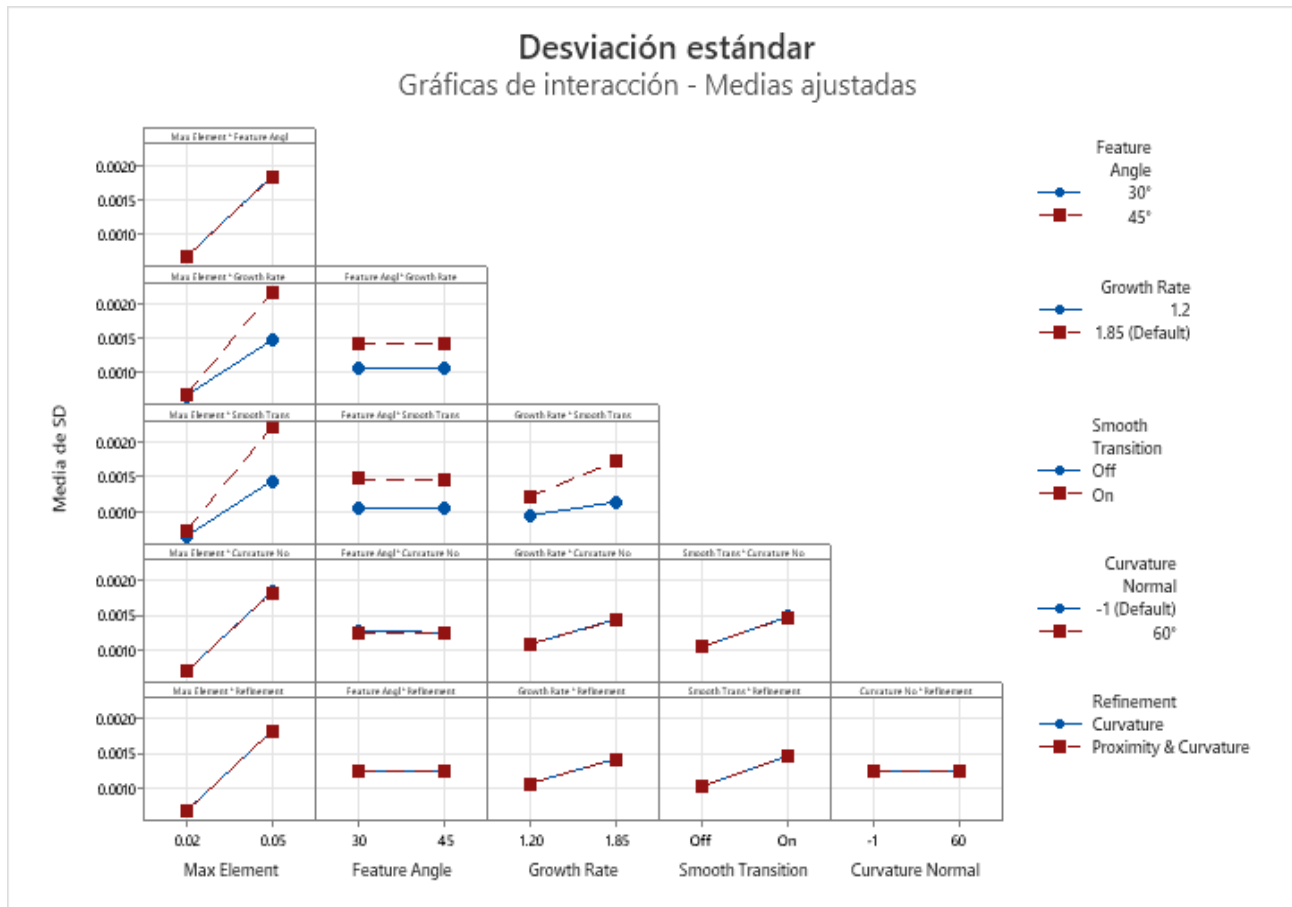


Figura 5.23. Interacción entre parámetros para la desviación estándar de los valores Jacobianos.

Además, se identifica una separación entre el ángulo característico y la razón de crecimiento, el ángulo característico y la transición suave, así como entre la razón de crecimiento y la transición suave. Estas interacciones sugieren que estos pares de parámetros no tienen una influencia conjunta en la variabilidad de los resultados y, por lo tanto, no presentan una interacción entre sí.

La aplicación del modelo lineal general con ajuste de una interacción de segundo orden para los factores en cuestión añadió una capa adicional de profundidad al análisis de los datos recopilados. Este enfoque no solo permitió examinar las relaciones lineales entre los factores y la respuesta del sistema, sino que también abordó posibles efectos de interacción que podrían estar presentes en el modelo. Al ajustar la interacción de segundo orden, se pudo capturar mejor las complejidades del sistema y comprender cómo ciertas combinaciones de factores podrían tener efectos diferentes en la respuesta.

El análisis de varianza (ANOVA) realizado sobre el modelo lineal general proporcionó una evaluación cuantitativa de la significancia de los diferentes términos del modelo, incluidas las interacciones de segundo orden. Los valores p obtenidos a través de ANOVA permitieron determinar la importancia estadística de cada término en el modelo y discernir qué factores y combinaciones de factores tenían un impacto significativo en la respuesta del sistema.

En las Tablas 15 a 21 (apéndice II) se presentan los resultados del análisis de varianza realizado mediante el modelo lineal general para evaluar los efectos de los factores y las interacciones de segundo orden en el estudio. Este análisis mejoró la validez y la fiabilidad de los resultados visualizados en las gráficas de efectos principales y de interacción al proporcionar una evaluación de la relación entre los factores de estudio y la respuesta del sistema. Además, permitió identificar relaciones más complejas y sutiles que podrían haber pasado desapercibidas en un análisis puramente visual de los datos como en las gráficas mencionadas anteriormente.

En la Tabla 15 del apéndice II, se observa que los factores con mayor influencia en el estudio del porcentaje de error entre el esfuerzo máximo nodal y el esfuerzo máximo de los elementos son el tamaño del elemento, la razón de crecimiento y la transición suave. Las interacciones más relevantes identificadas son entre el tamaño del elemento y la razón de crecimiento, el tamaño del elemento y la transición suave, y la razón de crecimiento junto con la transición suave.

La Tabla 16 del apéndice II, indica que la transición suave es el factor más influyente entre el porcentaje de error del esfuerzo máximo nodal y el esfuerzo teórico obtenido. Las interacciones importantes son entre el tamaño del elemento y la razón de crecimiento, y el tamaño del elemento y la transición suave.

En la Tabla 17 del apéndice II, se observa que los factores significativos entre el porcentaje de error del esfuerzo máximo de los elementos y el esfuerzo teórico incluyen el tamaño del elemento, la razón de crecimiento, y la transición suave. Las interacciones relevantes son entre el tamaño del elemento y la razón de crecimiento, y la razón de crecimiento junto con la transición suave.

La Tabla 18 del apéndice II, destaca que los factores más influyentes en cuanto a la generación del mallado son el tamaño del elemento y la transición suave. Las interacciones importantes son entre el tamaño del elemento y la razón de crecimiento, y la curvatura normal junto con la transición suave.

La Tabla 19 del apéndice II, muestra que los factores más significativos para realizar la simulación son el tamaño del elemento y la transición suave. Las interacciones clave son entre el tamaño del elemento y la razón de crecimiento, y el tamaño del elemento y la transición suave.

La Tabla 20 del apéndice II, revela que los factores más significativos en cuanto a los valores Jacobianos obtenidos son el tamaño del elemento, la razón de crecimiento, y la transición suave. Las interacciones importantes son entre el tamaño del elemento y la razón de crecimiento, el tamaño del elemento y la transición suave, y la razón de crecimiento junto con la transición suave.

Finalmente, en la Tabla 21 del apéndice II, se observa que los factores más significativos para la desviación estándar entre los valores Jacobianos son el tamaño del elemento, la razón de crecimiento, y la transición suave. Las interacciones más importantes son entre el tamaño del elemento y la razón de crecimiento, el tamaño del elemento y la transición suave, y la razón de crecimiento junto con la transición suave.

A través de las diversas tablas se identifica que el tamaño del elemento, la razón de crecimiento, y la transición suave son factores significativos en el análisis. Además, las interacciones entre estos factores juegan un papel importante en la precisión y efectividad de los resultados de la simulación.

Esta evaluación cuantitativa proporciona una comprensión más profunda de cómo estos parámetros y sus interacciones afectan el desempeño del modelo, y es esencial para optimizar el diseño y la simulación en futuros estudios.

El análisis de varianza realizado se puede complementar con la implementación del diseño de Plackett-Burman, el cual es un método eficiente para identificar los factores más influyentes en un experimento. Este diseño permite identificar rápidamente los factores críticos como el tamaño del elemento, la razón de crecimiento, y la transición suave, que son recurrentemente significativos en este análisis. En las Tablas 22 a 28 (apéndice II) se presenta el análisis de varianza con respecto a este modelo.

En la Tabla 22 del apéndice II, se observa que los factores significativos para el modelo Plackett-Burman entre el porcentaje de error del esfuerzo máximo nodal y el esfuerzo máximo en los elementos son el tamaño del elemento, la razón de crecimiento y la transición suave. Con ayuda de su respectivo diagrama de Pareto (Figura 5.24), se confirma que estos tres factores son los más importantes. El diagrama de Pareto proporciona una representación visual que facilita la identificación de los valores p significativos de manera más clara y efectiva.

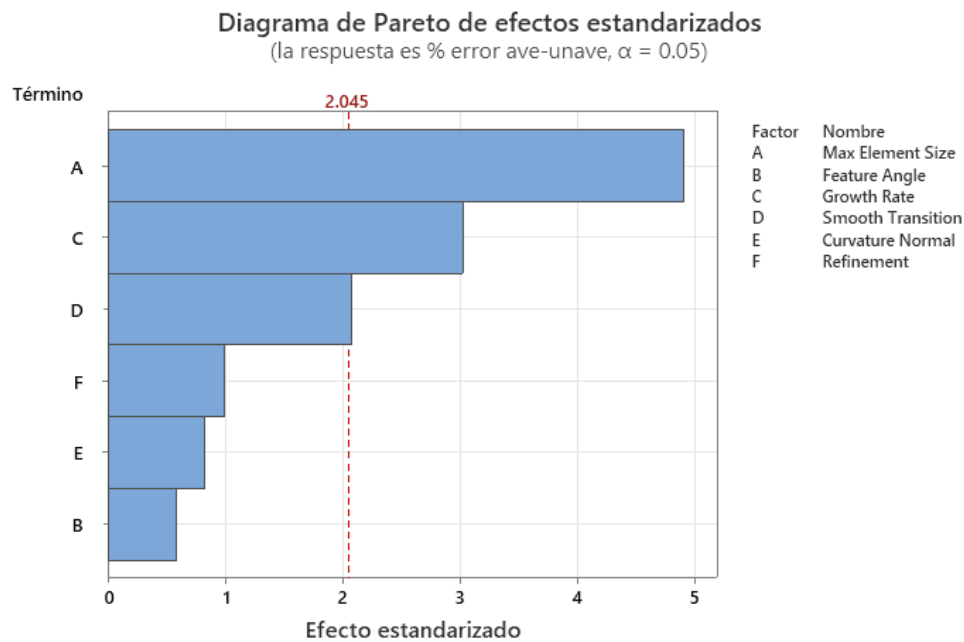


Figura 5.24. Diagrama de Pareto del porcentaje de error entre el esfuerzo máximo promediado y el esfuerzo máximo no promediado.

Dicho diagrama también se compara con la gráfica de efectos principales extraída del modelo Plackett-Burman, que se muestra en la Figura 5.25, confirmando los factores más importantes mencionados tanto en el diagrama de Pareto como en la Figura 5.10.

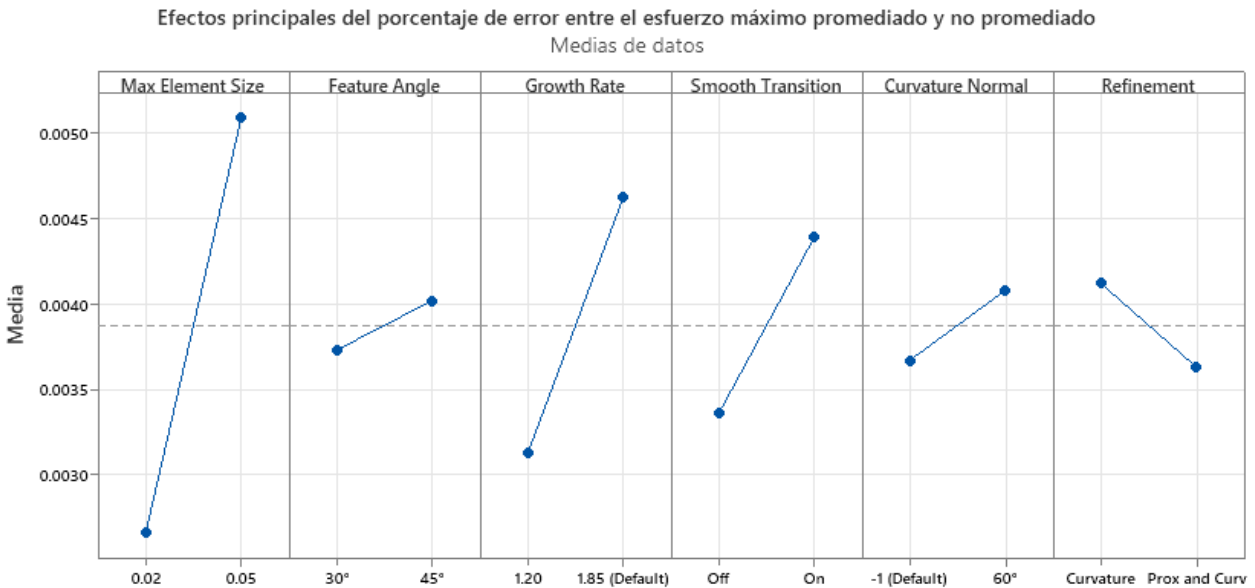


Figura 5.25. Gráfica de efectos principales del modelo Plackett-Burman para el porcentaje de error entre el esfuerzo máximo promediado y el esfuerzo máximo no promediado.

En la Tabla 23 del apéndice II, se identifica que el único factor significativo del modelo Plackett-Burman entre el porcentaje de error del esfuerzo máximo nodal y el esfuerzo máximo de los elementos es la transición suave. La Figura 5.26 ilustra este hallazgo, mostrando claramente que la transición suave es significativamente más importante que los demás factores. Por otro lado, la Figura 5.27 muestra los efectos principales del modelo Plackett-Burman, donde, a pesar de tener un comportamiento ligeramente diferente al de la Figura 5.11, el factor significativo sigue siendo la transición suave.

La Tabla 24 del apéndice II, muestra que el tamaño del elemento y la razón de crecimiento son los únicos factores significativos entre el porcentaje de error del esfuerzo máximo de los elementos y el esfuerzo teórico. La Figura 5.28 corrobora este resultado, indicando que estos dos factores son los más relevantes por una amplia diferencia. Además, la Figura 5.29 muestra un comportamiento muy similar al mostrado en la Figura 5.12, destacando como factores importantes tanto el tamaño del elemento como la razón de crecimiento.

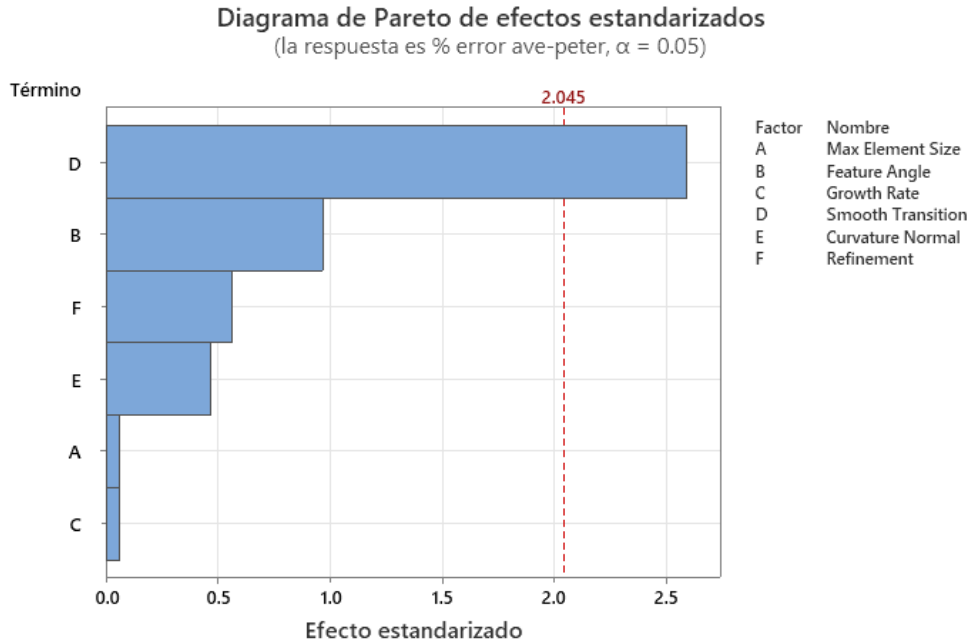


Figura 5.26. Diagrama de Pareto del porcentaje de error entre el esfuerzo máximo promediado y el esfuerzo teórico.

Efectos principales del porcentaje de error entre el esfuerzo máximo promediado y el esfuerzo teórico
Medias de datos

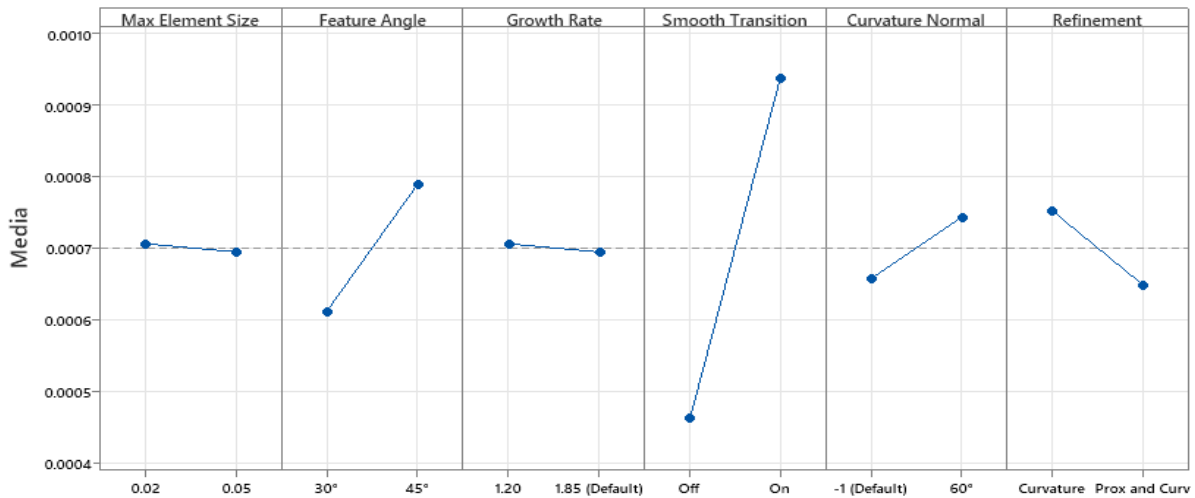


Figura 5.27. Gráfica de efectos principales del modelo Plackett-Burman para el porcentaje de error entre el esfuerzo máximo promediado y el esfuerzo teórico.

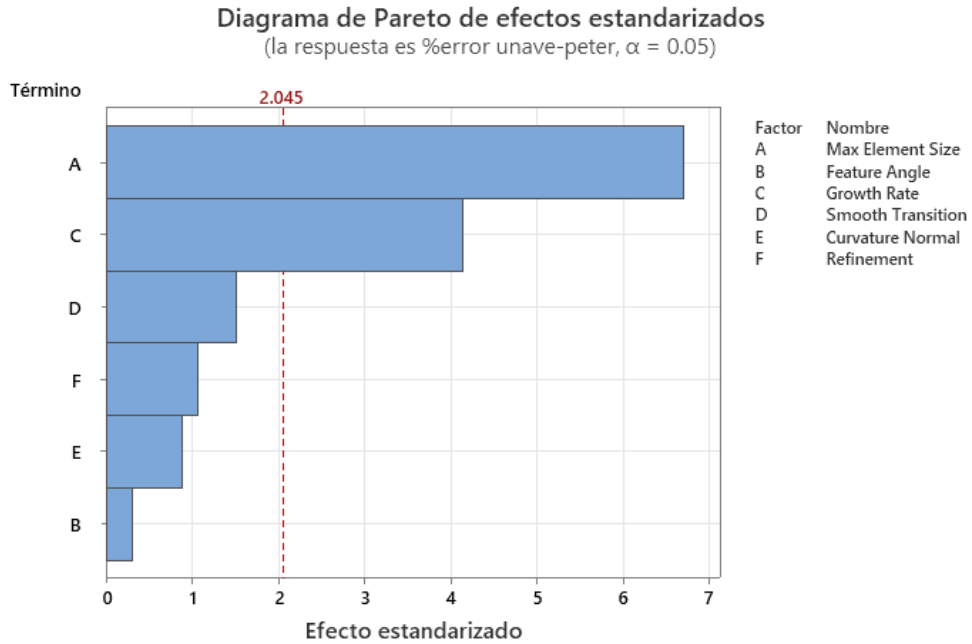


Figura 5.28. Diagrama de Pareto del porcentaje de error entre el esfuerzo máximo no promediado y el esfuerzo máximo teórico.

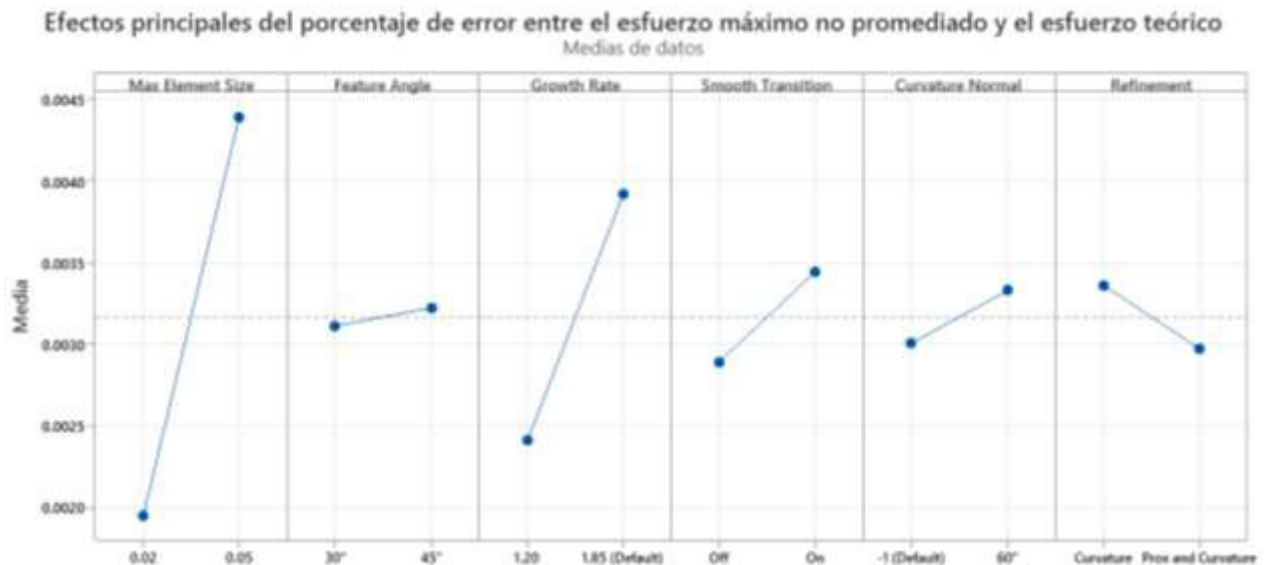


Figura 5.29. Gráfica de efectos principales del modelo Plackett-Burman para el porcentaje de error entre el esfuerzo máximo no promediado y el esfuerzo teórico.

En la Tabla 25 del apéndice II, se destaca que los factores significativos en cuanto a la generación del mallado son el tamaño del elemento y el refinamiento. Es notable que el refinamiento aparezca como un factor importante en esta instancia, ya que no había sido significativo en las tablas anteriores. Las Figuras 5.30 y 5.31 muestran que el tamaño del elemento es, por mucho, el factor

más importante, con el refinamiento siendo relevante, pero en menor medida, tal como se observó en la Figura 5.13.

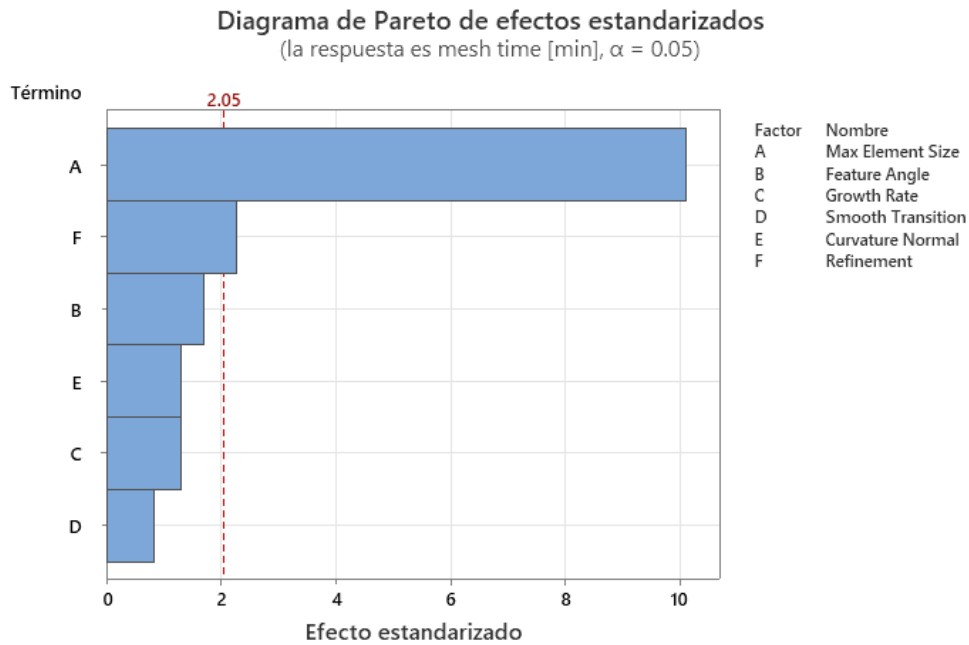


Figura 5.30. Diagrama de Pareto del tiempo de mallado.

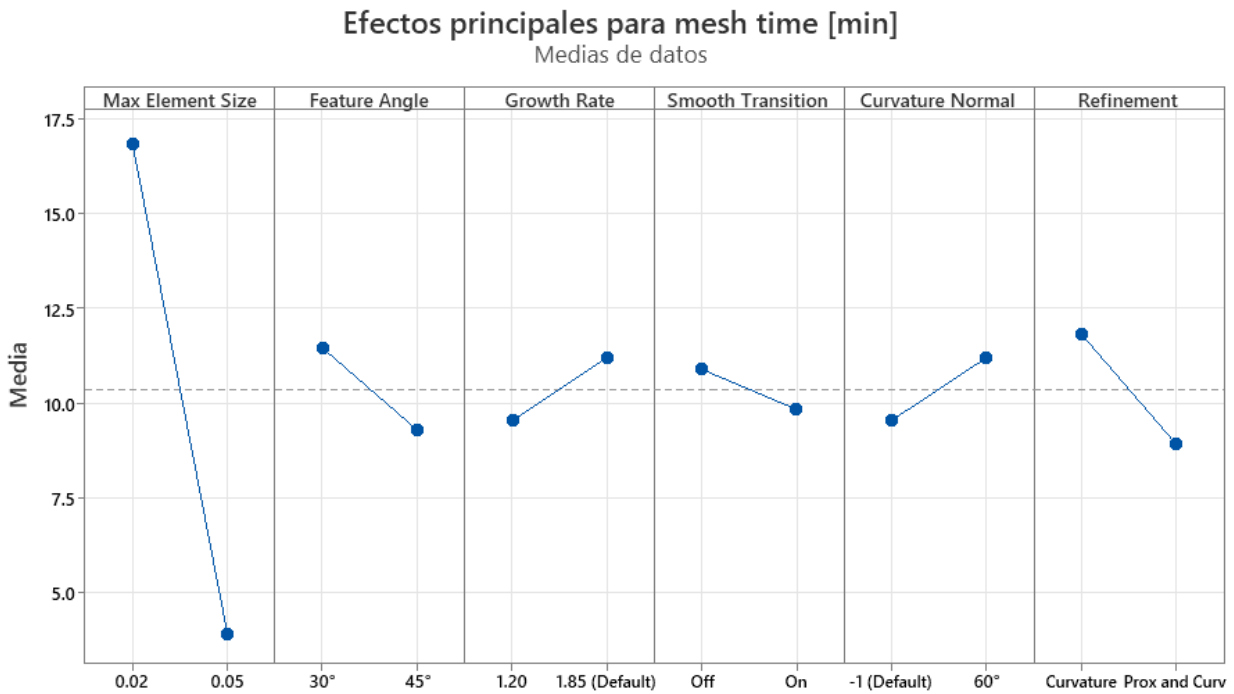


Figura 5.31. Gráfica de efectos principales del modelo Placket-Burman para el tiempo de mallado.

La Tabla 26 del apéndice II, señala que los factores más significativos para realizar la simulación son el tamaño del elemento, la razón de crecimiento y la transición suave. Las Figuras 5.32 y 5.33 ilustran que el tamaño del elemento y la transición suave son los factores más importantes por un amplio margen; sin embargo, en la Figura 5.32 se muestra que la razón de crecimiento es también significativa, pero en menor grado, comprobando los efectos principales de la Figura 5.14.

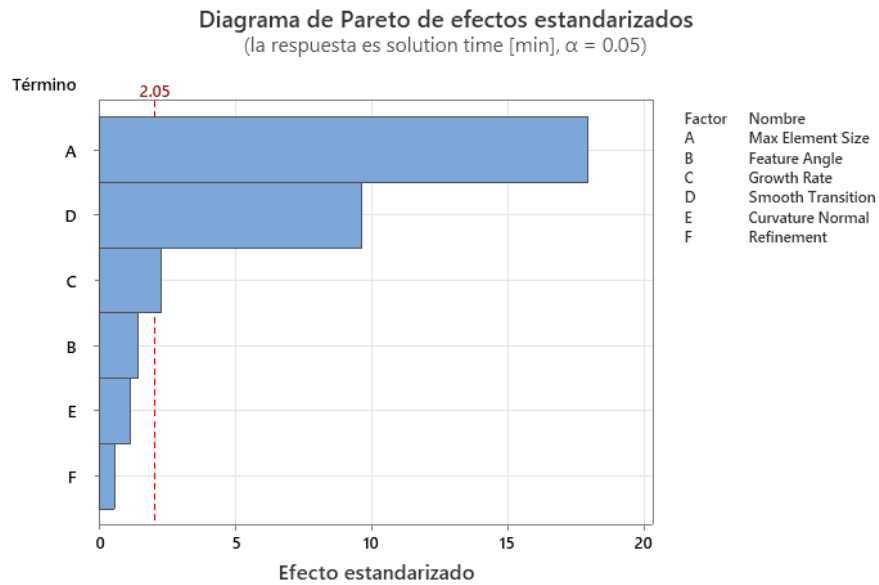


Figura 5.32. Diagrama de Pareto del tiempo de solución.

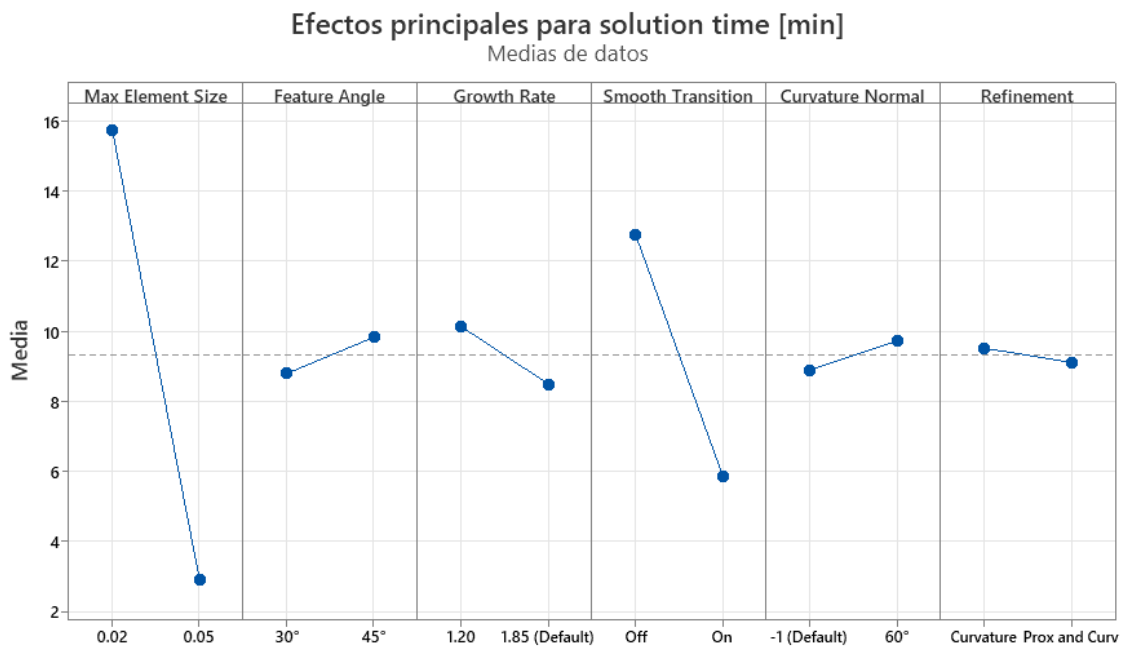


Figura 5.33. Gráfica de efectos principales del modelo Plackett-Burman para el tiempo de solución.

En la Tabla 27 del apéndice II, se observa que los factores significativos para los valores Jacobianos obtenidos son el tamaño del elemento, la razón de crecimiento y la transición suave. Las Figuras 5.34 y 5.35 muestran que la transición suave es el factor más importante, seguido por el tamaño del elemento y la razón de crecimiento en menor medida, confirmando los efectos de la Figura 5.15.

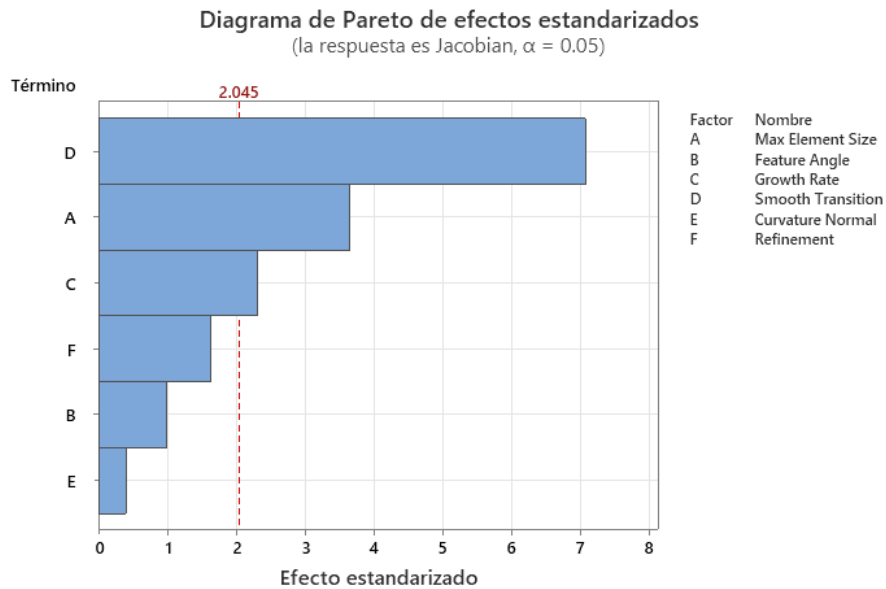


Figura 5.34. Diagrama de Pareto de los valores Jacobianos.

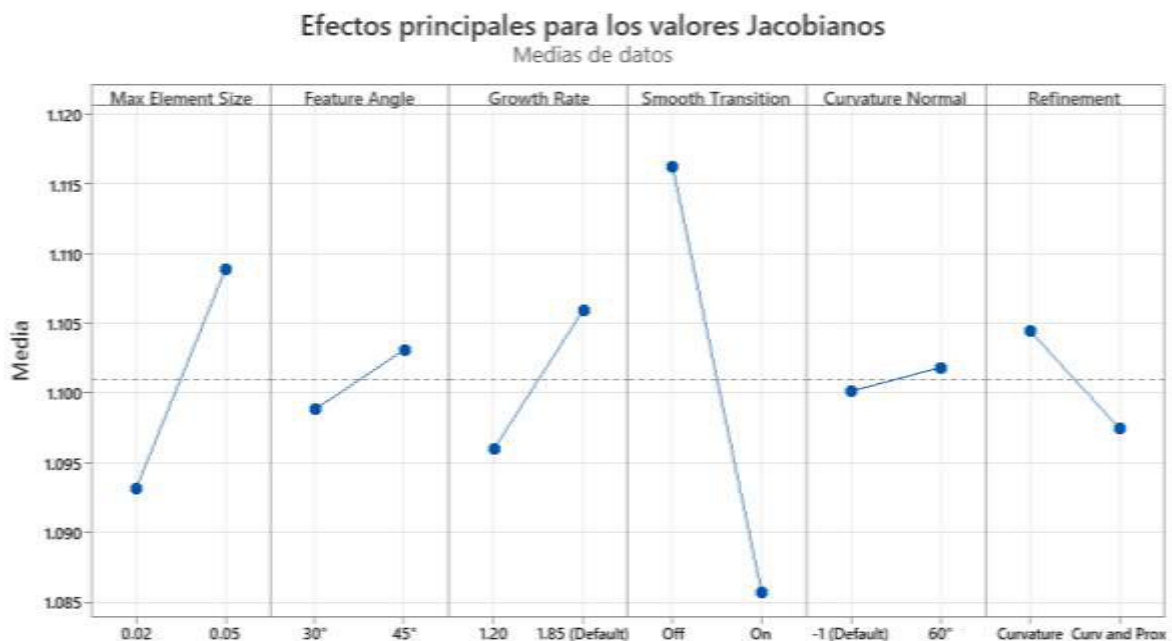


Figura 5.35. Gráfica de efectos principales del modelo Plackett-Burman para los valores Jacobianos.

Finalmente, en la Tabla 28 del apéndice II, se evidencia que los factores más significativos en cuanto a la desviación estándar de los valores Jacobianos obtenidos son el tamaño del elemento, la razón de crecimiento y la transición suave. Las Figuras 5.36 y 5.37 demuestran que el tamaño del elemento es el factor más importante por mucho, mientras que la transición suave y la razón de crecimiento son relevantes, pero en menor medida.

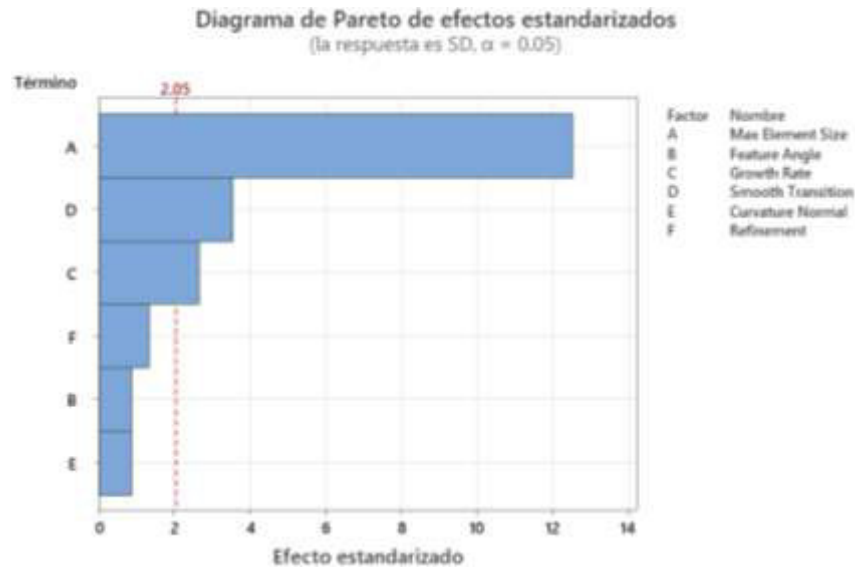


Figura 5.36. Diagrama de Pareto de la desviación estándar de los valores Jacobianos.

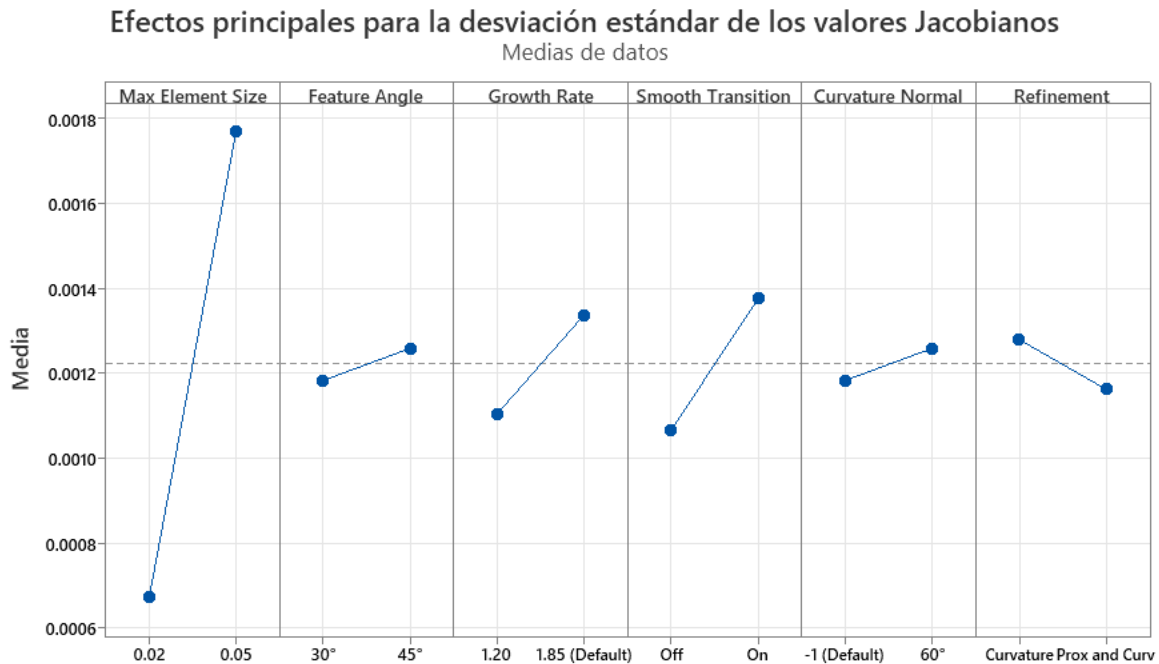


Figura 5.37. Gráfica de efectos principales del modelo Plackett-Burman para la desviación estándar de los valores Jacobianos.

El análisis de las tablas y sus respectivos diagramas de Pareto y de efectos principales resalta consistentemente que el tamaño del elemento, la razón de crecimiento y la transición suave son factores críticos en el análisis.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

6.1 Conclusiones

El análisis realizado con mallas estructuradas en ANSYS APDL proporcionó una referencia crucial para corroborar el valor teórico obtenido de la gráfica de Peterson, utilizando la evaluación del porcentaje de error con la norma energética. Este enfoque permitió realizar una comparación precisa con porcentaje de error experimental de los esfuerzos nodales y los esfuerzos en los elementos (esfuerzos promediados y no promediados).

A lo largo de este estudio, se llevaron a cabo diversas simulaciones en 2D y 3D que revelaron importante conocimiento sobre la elección del tamaño de los elementos. En el caso de elementos cuadráticos, se determinó que el tamaño de elemento óptimo para el caso mostrado en este trabajo se encuentra en un rango entre 0.25 y 0.05. Esta elección permitió minimizar el porcentaje de error con la norma energética, logrando una mayor precisión en los resultados obtenidos. Por otro lado, para elementos hexaédricos, el tamaño de elemento más adecuado fue identificado como 0.05. Este tamaño específico no solo mejoró la precisión de los resultados, sino que también mantuvo el tiempo de cómputo en niveles razonables, evitando la excesiva cantidad de elementos y, por ende, el incremento significativo del tiempo de procesamiento.

El análisis detallado de los resultados de las simulaciones en 2D y 3D permitió demostrar que el esfuerzo teórico obtenido era confiable y adecuado para continuar con estudios más avanzados. Este esfuerzo teórico validado serviría como base para el análisis en ANSYS Workbench, un paso esencial para identificar los parámetros más significativos en un análisis de mallados libres tetraédricos. La transición hacia ANSYS Workbench permitiría explorar las interacciones entre diversos parámetros de malla y su impacto en la precisión y eficiencia de los modelos estructurales.

La metodología aplicada en este estudio no solo validó el esfuerzo teórico de referencia, sino que también estableció una base sólida para futuros análisis. Identificar los tamaños de elementos óptimos y comprender los factores que influyen en la precisión de los resultados son aspectos fundamentales para mejorar la calidad de los análisis estructurales y libres, y optimizar los diseños en contextos prácticos. Este enfoque integral asegura que los modelos utilizados en simulaciones estructurales y libres sean tanto precisos como eficientes, facilitando la toma de decisiones informadas en el diseño y análisis de estructuras.

Después de un exhaustivo análisis de los resultados obtenidos en las gráficas de efectos principales y las gráficas de interacción, se puede concluir que el parámetro de refinamiento no exhibe ninguna influencia significativa en el proceso de simulación en un mallado libre, ya que no muestra representación destacada en ningún momento. Esta falta de relevancia sugiere que el refinamiento puede no ser un factor crucial por considerar al ajustar el modelo para obtener resultados más precisos.

En cuanto a la curvatura normal, los datos sugieren que también puede no ser un parámetro muy importante. Aunque en algunos casos mostró cierta significancia, fue pocas veces y de manera poco destacada. Esta observación plantea la posibilidad de que la curvatura normal no tenga un impacto significativo en los resultados de las simulaciones dentro del rango de valores estudiados.

Por otro lado, el ángulo característico parece tener cierta relevancia, especialmente cuando se considera junto con la razón de crecimiento y la curvatura normal. Sin embargo, al analizar su interacción con la razón de crecimiento, podría surgir una posible falta de buen ajuste o interacción adecuada. Esto sugiere que, aunque el ángulo característico puede tener cierta importancia en ciertos contextos, su influencia podría no ser tan consistente o clara en todas las situaciones.

Los factores que emergen como los más significativos son el tamaño del elemento, la razón de crecimiento y la transición suave. Estos parámetros muestran consistentemente los mayores niveles de significancia en los análisis realizados, lo que sugiere que son fundamentales para el proceso de simulación y deben recibir una atención particular al ajustar el modelo y optimizar dicho proceso.

Del análisis de los valores obtenidos del modelo lineal general, se concluye que los parámetros más significativos son el tamaño del elemento, la razón de crecimiento y la transición suave. Estos mismos parámetros resultaron ser los más importantes en el modelo de Plackett-Burman, respaldados por sus respectivos diagramas de Pareto con sus gráficas de efectos principales.

Por ende, estos parámetros, tanto de forma independiente como en interacción con otros factores, mostraron una influencia considerable en los resultados. Por otro lado, el ángulo característico, la curvatura normal y el refinamiento parecen tener un impacto menor en los resultados.

Estos descubrimientos resultan fundamentales, ya que identifican los parámetros más relevantes y significativos en el proceso de simulación. Entender la influencia de cada parámetro permite dirigir los esfuerzos hacia la optimización y el ajuste específico de aquellos aspectos del modelo que más inciden en los resultados deseados.

Además, estos resultados destacan la complejidad de las relaciones entre los diferentes parámetros del modelo, proporcionando información crucial para entender cómo interactúan y cómo influyen en los resultados de las simulaciones. Esta comprensión es esencial para ajustar adecuadamente el modelo y optimizar el proceso de simulación, asegurando la obtención de resultados precisos y confiables.

Comprender y evaluar los efectos y su significancia es crucial para interpretar adecuadamente los resultados de un experimento y para hacer ajustes informados en el proceso o sistema estudiado. La combinación de la evaluación de los parámetros y la significancia estadística proporciona una comprensión completa de cómo los factores influyen en la variable de respuesta, permitiendo optimizar procesos de manera efectiva.

La obtención de las gráficas del presente estudio junto con el análisis de varianza, son herramientas esenciales para evaluar la precisión y significancia de los coeficientes en un modelo experimental. La combinación de estas medidas permite a los investigadores tomar decisiones informadas sobre la importancia de los factores estudiados, asegurando que las conclusiones derivadas del experimento sean robustas y confiables. Esto es crucial para optimizar procesos y mejorar productos basados en evidencia científica sólida.

ANSYS APDL requiere un conocimiento profundo del lenguaje de scripting y proporciona un control detallado sobre el proceso de simulación, Esta flexibilidad, sin embargo, viene con la complejidad de la gestión manual de muchos aspectos del solver. Mientras tanto, ANSYS Workbench integra herramientas de simulación en una plataforma unificada, facilitando la configuración y ejecución de simulaciones. Su interfaz gráfica permite una interacción más intuitiva y una gestión automatizada de muchos parámetros del solver, reduciendo la posibilidad de errores y mejorando la eficiencia en la resolución de problemas.

La capacidad de ANSYS Workbench para resolver mallados complejos que no pudieron ser manejados por ANSYS APDL resalta la importancia de la gestión eficiente de recursos y la optimización del flujo de trabajo en simulaciones de ingeniería. Estas observaciones sugieren que, aunque ambos entornos son potentes y utilizan los mismos solvers, a elección entre APDL y Workbench debe considerar no solo el control y la flexibilidad necesarios, sino también la eficiencia en la gestión de recursos. Se puede considerar la capacitación en ambos entornos para aprovechar las ventajas específicas de cada uno según la naturaleza del proyecto.

6.2 Trabajo futuro

Para futuros trabajos, se propone la posibilidad de desarrollar un código macro destinado a optimizar el mallado libre en ANSYS Workbench. Este código podría automatizar el proceso de ajuste de parámetros del mallado y la simulación, permitiendo iterar automáticamente entre un rango de valores predefinido. De esta manera, se simplificaría y agilizaría el proceso de ajuste del modelo, así como la extracción y análisis de los resultados obtenidos.

Es importante destacar que, si bien la raíz del código utilizado en ANSYS Parametric Design Language (APDL) es similar, se ha observado que ANSYS Workbench ya cuenta con herramientas y códigos automáticos para realizar diversas rutinas de ajustes en el mallado, la geometría y la simulación. Estas funcionalidades integradas en Workbench pueden aprovecharse para desarrollar el código macro propuesto, lo que permitiría una implementación más eficiente y una integración fluida con el entorno de trabajo existente.

El desarrollo de este código macro ofrecería numerosas ventajas, como la reducción del tiempo dedicado a la optimización del modelo, la estandarización de los procesos y la posibilidad de

explorar de manera más exhaustiva el espacio de diseño. Además, al automatizar la iteración entre diferentes valores de parámetros y la extracción de resultados, se facilitaría el análisis de sensibilidad y la identificación de tendencias en el comportamiento del sistema.

La implementación de un código macro para optimizar el mallado libre en ANSYS Workbench representa una línea de investigación prometedora para mejorar la eficiencia y la precisión en la simulación de sistemas en ingeniería. Este enfoque podría brindar nuevas herramientas y metodologías para el diseño y la optimización de estructuras y dispositivos.

En resumen, el análisis de los datos mediante modelos estadísticos proporcionó una visión detallada de cómo los diferentes parámetros afectan los resultados del estudio. Estos hallazgos son fundamentales para comprender la dinámica del modelo y para orientar la optimización del diseño experimental en futuras investigaciones. Este análisis permitió identificar las interacciones entre los factores y sus respectivos niveles, lo que proporcionó una comprensión más profunda de cómo cada parámetro afecta los resultados del caso de estudio.

Apéndice I

Tabla 8. Geometría corta 2D – División al *endpoint* de la curva.

PLANE 182 QUAD						
SIMULATION	ELEMENT SIZE	% ENERGY NS-SMX	% ERROR	ES-SMX	% ERROR	
1	0.5	10.712	1387.88	28.4597938	1423.25	26.6365979
2	0.25	7.8243	1523.23	21.4829897	1535.39	20.8561856
3	0.1	4.6227	1700.18	12.3618557	1733.19	10.6603093
4	0.05	2.7363	1792.02	7.62783505	1814.92	6.44742268
5	0.025	1.4915	1844.85	4.90463918	1855.12	4.37525773
6	0.01	0.62354	1871.94	3.50824742	1876.14	3.29175258
PLANE 183 QUAD						
7	0.5	5.5912	1714.34	11.6319588	1863.05	3.96649485
8	0.25	2.0771	1777	8.40206186	1840.75	5.11597938
9	0.1	0.3395	1898.91	2.11804124	1902.55	1.93041237
10	0.05	0.06658	1886.3	2.76804124	1886.35	2.76546392
11	0.025	0.013618	1883.27	2.9242268	1883.31	2.92216495
12	0.01	0.0019407	1883.08	2.93402062	1883.09	2.93350515

Tabla 9. Geometría corta 2D – División al centro de la curva.

PLANE 182 QUAD						
SIMULATION	ELEMENT SIZE	% ENERGY	NS-SMX	% ERROR	ES-SMX	% ERROR
1	0.5	11.404	1402	27.7319588	1452.78	25.114433
2	0.25	7.9598	1604.93	17.2716495	1608.4	17.0927835
3	0.1	4.4056	1765.36	9.00206186	1776.81	8.41185567
4	0.05	2.5149	1829.83	5.67886598	1839.9	5.15979381
5	0.025	1.344	1861.43	4.05	1868.93	3.66340206
6	0.01	0.55724	1876.51	3.27268041	1879.99	3.09329897
PLANE183 QUAD						
7	0.5	5.4434	1647.72	15.0659794	1728.56	10.8989691
8	0.25	1.8639	1817.01	6.33969072	1848.49	4.71701031
9	0.1	0.30595	1871.62	3.52474227	1873.65	3.42010309
10	0.05	0.060655	1880.29	3.07783505	1880.3	3.07731959
11	0.025	0.011647	1882.16	2.9814433	1882.18	2.98041237
12	0.01	0.0014758	1882.77	2.95	1882.77	2.95

Tabla 10. Geometría larga 2D – División al *endpoint* de la curva.

PLANE 182 QUAD						
SIMULATION	ELEMENT SIZE	% ENERGY	NS-SMX	% ERROR	ES-SMX	% ERROR
1	0.5	8.2759	1355.93	30.1067	1362.64	29.76082
2	0.25	6.1182	1480.41	23.69021	1527.16	21.28041
3	0.1	3.7011	1682.3	13.28351	1720.67	11.30567
4	0.05	2.2239	1780.49	8.222165	1805.49	6.933505
5	0.025	1.2226	1840.12	5.148454	1850.26	4.625773
6	0.01	0.51299	1870.71	3.571649	1874.86	3.357732
PLANE183 QUAD						
7	0.5	4.3879	1710.52	11.82887	1864.49	3.892268
8	0.25	1.6199	1762.87	9.130412	1824.3	5.963918
9	0.1	0.26858	1898.92	2.117526	1902.28	1.94433
10	0.05	0.053138	1886	2.783505	1886.06	2.780412
11	0.025	0.010954	1882.96	2.940206	1883	2.938144
12	0.01	0.0015633	1882.77	2.95	1882.77	2.95

Tabla 11. Geometría larga 2D – División al centro de la curva.

PLANE 182 QUAD						
SIMULATION	ELEMENT SIZE	% ENERGY	NS-SMX	% ERROR	ES-SMX	% ERROR
1	0.5	8.6129	1325.68	31.66598	1332.99	31.28918
2	0.25	6.2764	1467.37	24.36237	1542.28	20.50103
3	0.1	3.6435	1699.07	12.41907	1748.41	9.875773
4	0.05	2.1302	1806.13	6.900515	1827.75	5.786082
5	0.025	1.1522	1851.23	4.575773	1863.68	3.934021
6	0.01	0.47975	1873.64	3.420619	1878.97	3.145876
PLANE183 QUAD						
7	0.5	5.0382	1666.85	14.0799	1824.9	5.93299
8	0.25	1.6453	1644.89	15.21186	1699.98	12.37216
9	0.1	0.2707	1854.13	4.426289	1869.95	3.610825
10	0.05	0.052832	1885.6	2.804124	1885.78	2.794845
11	0.025	0.010312	1883.3	2.92268	1883.36	2.919588
12	0.01	0.0013357	1882.33	2.97268	1882.33	2.97268

Tabla 12. Geometría corta 3D – División al *endpoint* de la curva.

SOLID185 HEXA						
SIMULATION	ELEMENT SIZE	% ENERGY	NS-SMX	% ERROR	ES-SMX	% ERROR
1	0.5	11.004	1227.12	36.746392	1278.79	34.08299
2	0.25	7.7069	1406.9	27.479381	1451.91	25.159278
3	0.1	4.2501	1660.43	14.410825	1687.75	13.002577
4	0.05	2.4168	1805.04	6.956701	1819.38	6.2175258
5	0.025	1.2887	1876.82	3.256701	1885.7	2.7989691
6	0.01	Error por falta de memoria sugiriendo aumentar la memoria virtual del sistema y/o espacio de trabajo asignado al programa.				
SOLID186 HEXA						
7	0.5	5.696	1781.17	8.1871134	2002.82	3.2381443
8	0.25	2.1577	1834.67	5.4293814	1911.24	1.4824742
9	0.1	0.35152	1955.75	0.8118557	1961	1.0824742
10	0.05	0.068643	1942.64	0.1360825	1942.76	0.142268
11	0.025	Error por falta de memoria sugiriendo aumentar la memoria virtual del sistema y/o espacio de trabajo asignado al programa.				
12	0.01	Error por falta de memoria sugiriendo aumentar la memoria virtual del sistema y/o espacio de trabajo asignado al programa.				

Tabla 13. Geometría corta 3D – División al centro de la curva.

SOLID185 HEXA						
SIMULATION	ELEMENT SIZE	% ENERGY	NS-SMX	% ERROR	ES-SMX	% ERROR
1	0.5	11.263	1250.11	35.56134	1318.46	32.038144
2	0.25	7.5457	1430.41	26.267526	1497.14	22.827835
3	0.1	3.9703	1689.52	12.91134	1728.75	10.889175
4	0.05	2.2117	1816.46	6.3680412	1834.84	5.4206186
5	0.025	1.1701	1881.48	3.0164948	1889.08	2.6247423
6	0.01	Error por falta de memoria sugiriendo aumentar la memoria virtual del sistema y/o espacio de trabajo asignado al programa.				
SOLID186 HEXA						
7	0.5	5.6274	1715.29	11.58299	1852.54	4.5082474
8	0.25	1.9497	1873.9	3.4072165	1923.74	0.8381443
9	0.1	0.31921	1928.03	0.6170103	1931.22	0.4525773
10	0.05	0.063439	1937.09	0.15	1937.13	0.1479381
11	0.025	Error por falta de memoria sugiriendo aumentar la memoria virtual del sistema y/o espacio de trabajo asignado al programa.				
12	0.01	Error por falta de memoria sugiriendo aumentar la memoria virtual del sistema y/o espacio de trabajo asignado al programa.				

Apéndice II

Max Element Size	Feature Angle	Growth Rate	Smooth Transition	Curvature Normal	Refinement	Max Element Size
0.02	30	1.20	Off	-1	Curv	0.02
0.05	30	1.20	Off	-1	Curv	0.05
0.02	45	1.20	Off	-1	Curv	0.02
0.05	45	1.20	Off	-1	Curv	0.05
0.02	30	1.85	Off	-1	Curv	0.02
0.05	30	1.85	Off	-1	Curv	0.05
0.02	45	1.85	Off	-1	Curv	0.02
0.05	45	1.85	Off	-1	Curv	0.05
0.02	30	1.20	On	-1	Curv	0.02
0.05	30	1.20	On	-1	Curv	0.05
0.02	45	1.20	On	-1	Curv	0.02
0.05	45	1.20	On	-1	Curv	0.05
0.02	30	1.85	On	-1	Curv	0.02
0.05	30	1.85	On	-1	Curv	0.05
0.02	45	1.85	On	-1	Curv	0.02
0.05	45	1.85	On	-1	Curv	0.05
0.02	30	1.20	Off	60	Curv	0.02
0.05	30	1.20	Off	60	Curv	0.05
0.02	45	1.20	Off	60	Curv	0.02
0.05	45	1.20	Off	60	Curv	0.05
0.02	30	1.85	Off	60	Curv	0.02
0.05	30	1.85	Off	60	Curv	0.05
0.02	45	1.85	Off	60	Curv	0.02
0.05	45	1.85	Off	60	Curv	0.05
0.02	30	1.20	On	60	Curv	0.02
0.05	30	1.20	On	60	Curv	0.05
0.02	45	1.20	On	60	Curv	0.02
0.05	45	1.20	On	60	Curv	0.05
0.02	30	1.85	On	60	Curv	0.02
0.05	30	1.85	On	60	Curv	0.05
0.02	45	1.85	On	60	Curv	0.02
0.05	45	1.85	On	60	Curv	0.05
0.02	30	1.20	Off	-1	Prox and Curv	0.02
0.05	30	1.20	Off	-1	Prox and Curv	0.05
0.02	45	1.20	Off	-1	Prox and Curv	0.02
0.05	45	1.20	Off	-1	Prox and Curv	0.05
0.02	30	1.85	Off	-1	Prox and Curv	0.02
0.05	30	1.85	Off	-1	Prox and Curv	0.05
0.02	45	1.85	Off	-1	Prox and Curv	0.02
0.05	45	1.85	Off	-1	Prox and Curv	0.05
0.02	30	1.20	On	-1	Prox and Curv	0.02
0.05	30	1.20	On	-1	Prox and Curv	0.05
0.02	45	1.20	On	-1	Prox and Curv	0.02
0.05	45	1.20	On	-1	Prox and Curv	0.05
0.02	30	1.85	On	-1	Prox and Curv	0.02
0.05	30	1.85	On	-1	Prox and Curv	0.05
0.02	45	1.85	On	-1	Prox and Curv	0.02
0.05	45	1.85	On	-1	Prox and Curv	0.05
0.02	30	1.20	Off	60	Prox and Curv	0.02
0.05	30	1.20	Off	60	Prox and Curv	0.05
0.02	45	1.20	Off	60	Prox and Curv	0.02
0.05	45	1.20	Off	60	Prox and Curv	0.05
0.02	30	1.85	Off	60	Prox and Curv	0.02
0.05	30	1.85	Off	60	Prox and Curv	0.05
0.02	45	1.85	Off	60	Prox and Curv	0.02
0.05	45	1.85	Off	60	Prox and Curv	0.05
0.02	30	1.20	On	60	Prox and Curv	0.02
0.05	30	1.20	On	60	Prox and Curv	0.05
0.02	45	1.20	On	60	Prox and Curv	0.02
0.05	45	1.20	On	60	Prox and Curv	0.05
0.02	30	1.85	On	60	Prox and Curv	0.02
0.05	30	1.85	On	60	Prox and Curv	0.05
0.02	45	1.85	On	60	Prox and Curv	0.02
0.05	45	1.85	On	60	Prox and Curv	0.05

Figura 5.6. 64 combinaciones extraídas de Minitab.

% error ave-unave	% error ave-Peter	%error unave-peter	mesh time [min]	solution time [min]	Jacobian	SD
0.0024248	0.0008763	0.0015464	17.3833	20.9166	1.1127	0.0006307
0.0034538	0.0000515	0.0034021	16.8833	9.2500	1.1091	0.0012465
0.0024764	0.0008763	0.0015979	17.0000	21.9166	1.1127	0.0006308
0.0034538	0.0000515	0.0034021	17.8333	6.0000	1.1091	0.0012465
0.0024248	0.0008763	0.0015464	15.7500	21.0833	1.1127	0.0006312
0.0046910	0.0000515	0.0046392	9.7833	3.0000	1.1251	0.0016306
0.0024248	0.0008763	0.0015464	16.0000	21.0000	1.1127	0.0006308
0.0046910	0.0000515	0.0046392	3.1166	2.8333	1.1251	0.0016306
0.0025784	0.0004124	0.0021649	12.3333	10.0666	1.0887	0.0007161
0.0037664	0.0009278	0.0028351	3.3333	1.0000	1.0818	0.0017062
0.0029403	0.0007216	0.0022165	13.3333	10.1666	1.0798	0.0007106
0.0037664	0.0009278	0.0028351	3.5000	1.5000	1.0818	0.0017069
0.0029908	0.0003608	0.0026289	13.3333	9.7833	1.0713	0.0007185
0.0054681	0.0007732	0.0046907	2.5833	0.9500	1.1179	0.0027702
0.0029908	0.0003608	0.0026289	13.5333	11.8833	1.0713	0.0007185
0.0101767	0.0021649	0.0079897	2.5666	1.0500	1.1303	0.0026978
0.0024764	0.0008763	0.0015979	17.2833	20.3333	1.1127	0.0006309
0.0034538	0.0000515	0.0034021	4.8000	5.5000	1.1091	0.0012465
0.0024248	0.0008763	0.0015464	17.0833	20.8333	1.1127	0.0006307
0.0034538	0.0000515	0.0034021	4.5666	5.6333	1.1091	0.0012465
0.0024248	0.0008763	0.0015464	17.2000	20.7333	1.1127	0.0006307
0.0046910	0.0000515	0.0046392	3.3500	3.2666	1.1251	0.0016306
0.0024248	0.0008763	0.0015464	17.6166	21.3666	1.1127	0.0006308
0.0046910	0.0000520	0.0046392	7.0000	9.7000	1.1251	0.0016306
0.0028367	0.0005670	0.0022680	12.5833	10.5833	1.0580	0.0007092
0.0037664	0.0009278	0.0028351	3.5166	1.8833	1.0818	0.0017062
0.0028364	0.0004639	0.0023711	12.8166	10.3000	1.0637	0.0007177
0.0037664	0.0009278	0.0028351	2.5833	1.0333	1.0818	0.0017062
0.0029908	0.0003608	0.0026289	31.1333	10.3000	1.0713	0.0007185
0.0101767	0.0021649	0.0079897	2.5833	1.0333	1.1303	0.0026978
0.0029914	0.0005670	0.0024227	31.1333	9.3833	1.0704	0.0007326
0.0101767	0.0021649	0.0079897	2.2333	0.9500	1.1303	0.0026978
0.0024248	0.0008763	0.0015464	14.3333	20.0333	1.1127	0.0006307
0.0034538	0.0000515	0.0034021	4.0500	4.9166	1.1091	0.0012465
0.0024248	0.0008763	0.0015464	15.9833	19.8833	1.1127	0.0006307
0.0034538	0.0000515	0.0034021	4.8500	5.4500	1.1091	0.0012465
0.0024248	0.0008763	0.0015464	17.2833	20.5833	1.1127	0.0006308
0.0046910	0.0000515	0.0046392	3.3666	3.2500	1.1251	0.0016320
0.0024248	0.0008763	0.0015464	36.5833	20.9166	1.1127	0.0006308
0.0046910	0.0000515	0.0046392	11.8500	4.7833	1.1251	0.0016306
0.0029412	0.0010309	0.0019072	14.9500	10.5666	1.1139	0.0007147
0.0037664	0.0009278	0.0028351	3.9000	1.9500	1.0818	0.0017069
0.0021660	0.0004639	0.0017010	13.4833	10.3333	1.0608	0.0007066
0.0037664	0.0009278	0.0028351	3.6500	1.8833	1.0818	0.0017069
0.0032493	0.0005670	0.0026804	13.5000	10.3833	1.0625	0.0007186
0.0059803	0.0001546	0.0058247	2.5166	1.0166	1.1162	0.0027789
0.0025276	0.0007216	0.0018041	12.6666	10.3666	1.0758	0.0007211
0.0101767	0.0021649	0.0079897	2.5000	0.9666	1.1303	0.0026978
0.0024248	0.0008763	0.0015464	16.4333	21.3166	1.1127	0.0006308
0.0034538	0.0000515	0.0034021	4.5500	4.7500	1.1091	0.0012465
0.0024248	0.0008763	0.0015464	16.0833	21.6666	1.1127	0.0006308
0.0034538	0.0000515	0.0034021	4.4000	5.1666	1.1091	0.0012465
0.0024248	0.0008763	0.0015464	15.0166	20.4666	1.1127	0.0006308
0.0046910	0.0000515	0.0046392	2.9333	2.8000	1.1251	0.0016306
0.0024248	0.0008763	0.0015464	14.6666	21.2500	1.1127	0.0006307
0.0046910	0.0000515	0.0046392	2.9000	2.7500	1.1251	0.0016306
0.0030947	0.0006186	0.0024742	11.4333	10.4333	1.0657	0.0007130
0.0037664	0.0009278	0.0028351	3.0833	1.5166	1.0818	0.0017069
0.0031468	0.0007732	0.0023711	11.3333	10.7833	1.0886	0.0007178
0.0037664	0.0009278	0.0028351	3.1500	1.5500	1.0818	0.0017062
0.0029908	0.0003608	0.0026289	11.6000	10.7166	1.0713	0.0007185
0.0101767	0.0021649	0.0079897	2.2666	0.8833	1.1303	0.0026978
0.0029908	0.0003608	0.0026289	11.5333	11.0000	1.0713	0.0007185
0.0101767	0.0021649	0.0079897	2.2666	0.9000	1.1303	0.0026978

Figura 5.7. Resultados de las 64 combinaciones registradas en Minitab.

Tabla 14. Cantidad de nodos y elementos por simulación.

Simulación	Nodos	Elementos	Simulación	Nodos	Elementos
1	14 351 527	10 650 197	33	14 351 527	10 650 197
2	3 725 982	2 725 214	34	3 725 991	2 725 223
3	14 351 560	10 650 215	35	14 351 548	10 650 209
4	3 725 991	2 725 223	36	3 725 991	2 725 223
5	14 351 529	10 650 198	37	14 351 527	10 650 197
6	2 372 476	1 708 909	38	2 372 445	1 708 887
7	14 351 527	10 650 197	39	14 351 543	10 650 205
8	2 372 470	1 708 905	40	2 372 470	1 708 905
9	6 545 969	4 791 126	41	6 544 732	4 790 157
10	1 213 093	845 323	42	1 213 104	845 332
11	6 545 771	4 790 974	43	6 547 738	4 792 448
12	1 213 104	845 332	44	1 213 104	845 332
13	6 454 200	4 722 251	45	6 457 476	4 724 760
14	718 073	473 013	46	718 064	472 914
15	6 454 200	4 722 251	47	6 455 475	4 723 243
16	717 432	472 431	48	717 432	472 431
17	14 351 551	10 650 208	49	14 351 567	10 650 219
18	3 725 991	2 725 223	50	3 725 991	2 725 223
19	14 351 546	10 650 208	51	14 351 527	10 650 197
20	3 725 991	2 725 223	52	3 725 991	2 725 223
21	14 351 527	10 650 197	53	14 351 540	10 650 202
22	2 372 476	1 708 909	54	2 372 476	1 708 909
23	14 351 527	10 650 197	55	14 351 545	10 650 205
24	2 373 470	1 708 905	56	2 372 470	1 708 905
25	6 545 635	4 790 840	57	6 546 452	4 791 393
26	1 213 093	845 323	58	1 213 204	845 332
27	6 546 885	4 791 801	59	6 545 001	4 790 431
28	1 213 093	845 323	60	1 213 093	854 323
29	6 454 200	4 722 251	61	6 454 200	4 722 251
30	717 432	472 431	62	717 432	472 431
31	6 457 911	4 725 095	63	6 454 200	4 722 251
32	717 432	472 431	64	717 432	472 431

Tabla 15. Modelo lineal general para el porcentaje de error entre el esfuerzo máximo promediado y el esfuerzo máximo no promediado.

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
Max Element Size	1	0.000107	0.000107	127.37	0.000
Feature Angle	1	0.000001	0.000001	1.14	0.291
Growth Rate	1	0.000044	0.000044	53.09	0.000
Curvature Normal	1	0.000002	0.000002	2.02	0.163
Refinement	1	0.000000	0.000000	0.00	0.961
Smooth Transition	1	0.000031	0.000031	37.51	0.000
Max Element Size & Feature Angle	1	0.000002	0.000002	1.86	0.180
Max Element Size & Growth Rate	1	0.000041	0.000041	48.89	0.000
Max Element Size & Curvature Normal	1	0.000001	0.000001	1.02	0.317
Max Element Size & Refinement	1	0.000000	0.000000	0.01	0.928
Max Element Size & Smooth Transition	1	0.000014	0.000014	16.92	0.000
Feature Angle & Growth Rate	1	0.000001	0.000001	1.36	0.250
Feature Angle & Curvature Normal	1	0.000001	0.000001	1.14	0.292
Feature Angle & Refinement	1	0.000000	0.000000	0.10	0.753
Feature Angle & Smooth Transition	1	0.000001	0.000001	1.14	0.291
Growth Rate & Curvature Normal	1	0.000001	0.000001	1.14	0.292
Growth Rate & Refinement	1	0.000000	0.000000	0.00	0.973
Growth Rate & Smooth Transition	1	0.000018	0.000018	21.26	0.000
Curvature Normal & Refinement	1	0.000000	0.000000	0.01	0.927
Curvature Normal & Smooth Transition	1	0.000002	0.000002	2.02	0.163
Refinement & Smooth Transition	1	0.000000	0.000000	0.01	0.939
Error	42	0.000035	0.000001		
Total	63	0.000302			

Tabla 16. Modelo lineal general para el porcentaje de error entre el esfuerzo máximo promediado y el esfuerzo teórico.

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
Max Element Size	1	0.000000	0.000000	0.05	0.825
Feature Angle	1	0.000000	0.000000	1.95	0.170
Growth Rate	1	0.000000	0.000000	4.01	0.052
Curvature Normal	1	0.000000	0.000000	1.24	0.272
Refinement	1	0.000000	0.000000	0.03	0.857
Smooth Transition	1	0.000004	0.000004	35.62	0.000
Max Element Size & Feature Angle	1	0.000000	0.000000	1.63	0.209
Max Element Size & Growth Rate	1	0.000001	0.000001	9.58	0.003
Max Element Size & Curvature Normal	1	0.000000	0.000000	2.43	0.127
Max Element Size & Refinement	1	0.000000	0.000000	0.45	0.508
Max Element Size & Smooth Transition	1	0.000010	0.000010	102.74	0.000
Feature Angle & Growth Rate	1	0.000000	0.000000	2.43	0.127
Feature Angle & Curvature Normal	1	0.000000	0.000000	1.42	0.239
Feature Angle & Refinement	1	0.000000	0.000000	0.00	0.984
Feature Angle & Smooth Transition	1	0.000000	0.000000	1.95	0.170
Growth Rate & Curvature Normal	1	0.000000	0.000000	1.63	0.209
Growth Rate & Refinement	1	0.000000	0.000000	0.15	0.702
Growth Rate & Smooth Transition	1	0.000000	0.000000	4.01	0.052
Curvature Normal & Refinement	1	0.000000	0.000000	0.00	0.952
Curvature Normal & Smooth Transition	1	0.000000	0.000000	1.24	0.272
Refinement & Smooth Transition	1	0.000000	0.000000	0.03	0.856
Error	42	0.000004	0.000000		
Total	63	0.000022			

Tabla 17. Modelo lineal general para el porcentaje de error entre el esfuerzo máximo no promediado y el esfuerzo teórico.

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
Max Element Size	1	0.000108	0.000108	267.80	0.000
Feature Angle	1	0.000000	0.000000	0.69	0.410
Growth Rate	1	0.000036	0.000036	89.90	0.000
Curvature Normal	1	0.000001	0.000001	2.20	0.146
Refinement	1	0.000000	0.000000	0.00	0.984
Smooth Transition	1	0.000014	0.000014	33.72	0.000
Max Element Size & Feature Angle	1	0.000001	0.000001	1.74	0.194
Max Element Size & Growth Rate	1	0.000029	0.000029	72.37	0.000
Max Element Size & Curvature Normal	1	0.000000	0.000000	0.45	0.507
Max Element Size & Refinement	1	0.000000	0.000000	0.22	0.643
Max Element Size & Smooth Transition	1	0.000000	0.000000	0.66	0.421
Feature Angle & Growth Rate	1	0.000000	0.000000	0.80	0.377
Feature Angle & Curvature Normal	1	0.000000	0.000000	0.87	0.356
Feature Angle & Refinement	1	0.000000	0.000000	0.20	0.657
Feature Angle & Smooth Transition	1	0.000000	0.000000	0.69	0.410
Growth Rate & Curvature Normal	1	0.000000	0.000000	0.80	0.377
Growth Rate & Refinement	1	0.000000	0.000000	0.06	0.809
Growth Rate & Smooth Transition	1	0.000013	0.000013	31.63	0.000
Curvature Normal & Refinement	1	0.000000	0.000000	0.03	0.872
Curvature Normal & Smooth Transition	1	0.000001	0.000001	2.20	0.146
Refinement & Smooth Transition	1	0.000000	0.000000	0.00	0.984
Error	42	0.000017	0.000000		
Total	63	0.000221			

Tabla 18. Modelo lineal general para el tiempo de mallado.

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
Max Element Size	1	2138.29	2138.29	97.37	0.000
Feature Angle	1	9.58	9.58	0.44	0.512
Growth Rate	1	13.94	13.94	0.63	0.430
Curvature Normal	1	16.61	16.61	0.76	0.389
Refinement	1	50.11	50.11	2.28	0.138
Smooth Transition	1	159.39	159.39	7.26	0.010
Max Element Size & Feature Angle	1	2.99	2.99	0.14	0.714
Max Element Size & Growth Rate	1	98.84	98.84	4.50	0.040
Max Element Size & Curvature Normal	1	35.40	35.40	1.61	0.211
Max Element Size & Refinement	1	0.01	0.01	0.00	0.987
Max Element Size & Smooth Transition	1	5.64	5.64	0.26	0.615
Feature Angle & Growth Rate	1	8.39	8.39	0.38	0.540
Feature Angle & Curvature Normal	1	7.27	7.27	0.33	0.568
Feature Angle & Refinement	1	12.78	12.78	0.58	0.450
Feature Angle & Smooth Transition	1	13.60	13.60	0.62	0.436
Growth Rate & Curvature Normal	1	13.69	13.69	0.62	0.434
Growth Rate & Refinement	1	0.51	0.51	0.02	0.880
Growth Rate & Smooth Transition	1	12.31	12.31	0.56	0.458
Curvature Normal & Refinement	1	40.69	40.69	1.85	0.181
Curvature Normal & Smooth Transition	1	99.33	99.33	4.52	0.039
Refinement & Smooth Transition	1	7.49	7.49	0.34	0.562
Error	42	922.36	21.96		
Total	63	3669.22			

Tabla 19. Modelo lineal general para el tiempo de solución.

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
Max Element Size	1	2527.99	2527.99	2046.03	0.000
Feature Angle	1	1.54	1.54	1.25	0.270
Growth Rate	1	4.93	4.93	3.99	0.052
Curvature Normal	1	0.02	0.02	0.02	0.902
Refinement	1	1.56	1.56	1.26	0.267
Smooth Transition	1	799.71	799.71	647.25	0.000
Max Element Size & Feature Angle	1	0.00	0.00	0.00	0.961
Max Element Size & Growth Rate	1	6.21	6.21	5.02	0.030
Max Element Size & Curvature Normal	1	0.07	0.07	0.05	0.817
Max Element Size & Refinement	1	1.59	1.59	1.29	0.262
Max Element Size & Smooth Transition	1	183.15	183.15	148.23	0.000
Feature Angle & Growth Rate	1	2.16	2.16	1.75	0.193
Feature Angle & Curvature Normal	1	0.48	0.48	0.39	0.535
Feature Angle & Refinement	1	0.05	0.05	0.04	0.841
Feature Angle & Smooth Transition	1	0.99	0.99	0.80	0.375
Growth Rate & Curvature Normal	1	0.60	0.60	0.49	0.490
Growth Rate & Refinement	1	0.01	0.01	0.00	0.949
Growth Rate & Smooth Transition	1	1.50	1.50	1.21	0.277
Curvature Normal & Refinement	1	0.00	0.00	0.00	0.979
Curvature Normal & Smooth Transition	1	0.09	0.09	0.07	0.794
Refinement & Smooth Transition	1	4.39	4.39	3.56	0.066
Error	42	51.89	1.24		
Total	63	3588.94			

Tabla 20. Modelo lineal general para los valores Jacobianos.

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
Max Element Size	1	0.004835	0.004835	55.83	0.000
Feature Angle	1	0.000000	0.000000	0.01	0.941
Growth Rate	1	0.002963	0.002963	34.22	0.000
Curvature Normal	1	0.000022	0.000022	0.25	0.619
Refinement	1	0.000018	0.000018	0.20	0.653
Smooth Transition	1	0.010560	0.010560	121.92	0.000
Max Element Size & Feature Angle	1	0.000035	0.000035	0.41	0.527
Max Element Size & Growth Rate	1	0.004616	0.004616	53.29	0.000
Max Element Size & Curvature Normal	1	0.000127	0.000127	1.47	0.232
Max Element Size & Refinement	1	0.000022	0.000022	0.25	0.621
Max Element Size & Smooth Transition	1	0.002698	0.002698	31.14	0.000
Feature Angle & Growth Rate	1	0.000082	0.000082	0.94	0.337
Feature Angle & Curvature Normal	1	0.000039	0.000039	0.45	0.506
Feature Angle & Refinement	1	0.000002	0.000002	0.02	0.882
Feature Angle & Smooth Transition	1	0.000000	0.000000	0.01	0.941
Growth Rate & Curvature Normal	1	0.000147	0.000147	1.70	0.199
Growth Rate & Refinement	1	0.000030	0.000030	0.35	0.559
Growth Rate & Smooth Transition	1	0.000503	0.000503	5.81	0.020
Curvature Normal & Refinement	1	0.000017	0.000017	0.20	0.657
Curvature Normal & Smooth Transition	1	0.000022	0.000022	0.25	0.619
Refinement & Smooth Transition	1	0.000018	0.000018	0.20	0.653
Error	42	0.003638	0.000087		
Total	63	0.030395			

Tabla 21. Modelo lineal general para la desviación estándar de los valores Jacobianos.

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
Max Element Size	1	0.000021	0.000021	2291.40	0.000
Feature Angle	1	0.000000	0.000000	0.03	0.857
Growth Rate	1	0.000002	0.000002	212.39	0.000
Curvature Normal	1	0.000000	0.000000	0.03	0.861
Refinement	1	0.000000	0.000000	0.00	0.998
Smooth Transition	1	0.000003	0.000003	319.05	0.000
Max Element Size & Feature Angle	1	0.000000	0.000000	0.05	0.826
Max Element Size & Growth Rate	1	0.000002	0.000002	207.92	0.000
Max Element Size & Curvature Normal	1	0.000000	0.000000	0.05	0.819
Max Element Size & Refinement	1	0.000000	0.000000	0.00	0.974
Max Element Size & Smooth Transition	1	0.000002	0.000002	203.95	0.000
Feature Angle & Growth Rate	1	0.000000	0.000000	0.03	0.858
Feature Angle & Curvature Normal	1	0.000000	0.000000	0.06	0.804
Feature Angle & Refinement	1	0.000000	0.000000	0.00	0.970
Feature Angle & Smooth Transition	1	0.000000	0.000000	0.03	0.862
Growth Rate & Curvature Normal	1	0.000000	0.000000	0.04	0.844
Growth Rate & Refinement	1	0.000000	0.000000	0.00	0.998
Growth Rate & Smooth Transition	1	0.000000	0.000000	43.35	0.000
Curvature Normal & Refinement	1	0.000000	0.000000	0.00	0.982
Curvature Normal & Smooth Transition	1	0.000000	0.000000	0.03	0.864
Refinement & Smooth Transition	1	0.000000	0.000000	0.00	0.996
Error	42	0.000000	0.000000		
Total	63	0.000031			

Tabla 22. Modelo Plackett-Burman para el porcentaje de error entre el esfuerzo máximo promediado y el esfuerzo máximo no promediado.

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
Max Element Size	1	0.000053	0.000053	24.07	0.000
Feature Angle	1	0.000001	0.000001	0.34	0.563
Growth Rate	1	0.000020	0.000020	9.14	0.005
Smooth Transition	1	0.000010	0.000010	4.33	0.046
Curvature Normal	1	0.000002	0.000002	0.68	0.415
Refinement	1	0.000002	0.000002	0.98	0.331
Error	29	0.000064	0.000002		
Falta de ajuste	25	0.000064	0.000003		
Error puro	4	0.000000	0.000000		
Total	35	0.000152			

Tabla 23. Modelo Plackett-Burman para el porcentaje de error entre el esfuerzo máximo promediado y el esfuerzo teórico.

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
Max Element Size	1	0.000000	0.000000	0.00	0.951
Feature Angle	1	0.000000	0.000000	0.94	0.341
Growth Rate	1	0.000000	0.000000	0.00	0.951
Smooth Transition	1	0.000002	0.000002	6.71	0.015
Curvature Normal	1	0.000000	0.000000	0.22	0.643
Refinement	1	0.000000	0.000000	0.32	0.578
Error	29	0.000009	0.000000		
Falta de ajuste	25	0.000009	0.000000		
Error puro	4	0.000000	0.000000		
Total	35	0.000011			

Tabla 24. Modelo Plackett-Burman para el porcentaje de error entre el esfuerzo máximo no promediado y el esfuerzo teórico.

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
Max Element Size	1	0.000054	0.000054	44.79	0.000
Feature Angle	1	0.000000	0.000000	0.09	0.762
Growth Rate	1	0.000020	0.000020	17.10	0.000
Smooth Transition	1	0.000003	0.000003	2.29	0.141
Curvature Normal	1	0.000001	0.000001	0.79	0.383
Refinement	1	0.000001	0.000001	1.12	0.298
Error	29	0.000035	0.000001		
Falta de ajuste	25	0.000035	0.000001		
Error puro	4	0.000000	0.000000		
Total	35	0.000114			

Tabla 25. Modelo Plackett-Burman para el tiempo de mallado.

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
Max Element Size	1	1502.42	1502.42	102.10	0.000
Feature Angle	1	42.32	42.32	2.88	0.101
Growth Rate	1	24.50	24.50	1.67	0.207
Smooth Transition	1	10.06	10.06	0.68	0.415
Curvature Normal	1	24.61	24.61	1.67	0.206
Refinement	1	75.98	75.98	5.16	0.031
Error	29	426.74	14.72		
Falta de ajuste	25	426.74	17.07		
Error puro	4	0.00	0.00		
Total	35	2106.64			

Tabla 26. Modelo Plackett-Burman para el tiempo de solución.

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
Max Element Size	1	1483.74	1483.74	322.13	0.000
Feature Angle	1	9.66	9.66	2.10	0.158
Growth Rate	1	24.20	24.20	5.25	0.029
Smooth Transition	1	428.37	428.37	93.00	0.000
Curvature Normal	1	6.18	6.18	1.34	0.256
Refinement	1	1.51	1.51	0.33	0.571
Error	29	133.58	4.61		
Falta de ajuste	25	133.58	5.34		
Error puro	4	0.00	0.00		
Total	35	2087.25			

Tabla 27. Modelo Plackett-Burman para el valor Jacobiano.

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
Max Element Size	1	0.002226	0.002226	13.32	0.001
Feature Angle	1	0.000165	0.000165	0.99	0.328
Growth Rate	1	0.000891	0.000891	5.33	0.028
Smooth Transition	1	0.008351	0.008351	49.97	0.000
Curvature Normal	1	0.000027	0.000027	0.16	0.693
Refinement	1	0.000440	0.000440	2.63	0.115
Error	29	0.004846	0.000167		
Falta de ajuste	25	0.004846	0.000194		
Error puro	4	0.000000	0.000000		
Total	35	0.016946			

Tabla 28. Modelo Plackett-Burman para la desviación estándar del valor Jacobiano.

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
Max Element Size	1	0.000011	0.000011	156.92	0.000
Feature Angle	1	0.000000	0.000000	0.75	0.392
Growth Rate	1	0.000000	0.000000	7.06	0.013
Smooth Transition	1	0.000001	0.000001	12.59	0.001
Curvature Normal	1	0.000000	0.000000	0.75	0.394
Refinement	1	0.000000	0.000000	1.81	0.189
Error	29	0.000002	0.000000		
Falta de ajuste	25	0.000002	0.000000		
Error puro	4	0.000000	0.000000		
Total	35	0.000014			

Bibliografía

- [1] E. Becker, G. Carey, and J. Oden, *Finite Elements: An introduction*, Volume 1. Prentice Hall, 1981.
- [2] E. Alawadhi, *Finite Element Simulations using ANSYS*, vol. 3, no. April. CRC Press, 2015.
- [3] M. K. Thompson and J. M. Thompson, *ANSYS Mechanical APDL for Finite Element Analysis*, 1st ed. Elsevier, 2017.
- [4] E. Madenci and I. Guven, *The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS*, 2nd ed. Springer International, 2015.
- [5] S. Ragab and H. Fayed, *Introduction to Finite Element Analysis for Engineers*, 1st ed. CRC Press, 2018.
- [6] T. Hsu, *Applied Engineering Analysis*, 1st ed. John Wiley & sons, 2018.
- [7] B. Szabó and I. Babuska, *Finite Element Analysis: Method, Verification and Validation*, 2nd ed. Wiley series in computational mechanics, 2021.
- [8] J. Dow, *A Unified Approach to the Finite Element Method and Error Analysis Procedures*. Academic Press, 1999.
- [9] A. Toba, “Ansys Workbench estrategias de mallado I.” 2016, Accessed: Apr. 28, 2023. [Online]. Available: https://www.youtube.com/watch?v=knh_fAoxik8.
- [10] Özgün, “Is Your Mesh Good Enough?,” *MECHEAD (Engineering, Analysis, Design)*, 2022.
- [11] Ansys Learning Forum, “What is a good mesh quality?,” 2023, Accessed: Apr. 28, 2023. [Online]. Available: <https://forum.ansys.com/forums/topic/what-is-the-good-mesh-quality-skewness-orthogonal/>.
- [12] A. Seeni, P. Rajendran, M. Hussin, and F. Ismail, “Errors and uncertainties in simulation of steady, viscous flow past a circular cylinder at $re = 20$ using a systematic approach,” *INCAS*

- Bull.*, vol. 12, no. 3, pp. 203–217, 2020, doi: 10.13111/2066-8201.2020.12.3.17.
- [13] ANSYS INC. HELP, “Element Shape Testing.” ANSYS, 2023, Accessed: Oct. 19, 2023. [Online]. Available: https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v232/en/ans_thry/thy_et7.html%23aLAFr4bjjw.
- [14] DEUST WORDPRESS, “Mesh Consideration in FEA and CFD Analysis,” 2012. <https://deust.wordpress.com/2012/08/22/mesh-consideration-in-fea-and-cfd-analysis/#more-284> (accessed Apr. 29, 2023).
- [15] Dassault Systemes, “Mesh Quality Checks,” *Solidworks Online Help*, 2021. https://help.solidworks.com/2021/english/SolidWorks/cworks/c_mesh_quality_checks.htm#:~:text=The Jacobian ratio measures the,with linear edges is 1.0 (accessed Apr. 30, 2023).
- [16] MIDAS GTS NX, “Check Quality,” *Software para análisis geotécnico 2D y 3D basado en el método de elementos finitos*, 2023. https://manual.midasuser.com/en_common/gts/420/GTS/06_Mesh/Mesh_Check_Quality.htm (accessed Apr. 29, 2023).
- [17] ML Engineering Mechanicalland, “Explanation of Jacobian Ratio in Ansys Meshing,” ANSYS, 2020. <https://mechanicalland.com/explanation-of-jacobian-ratio-in-ansys-meshing/> (accessed Apr. 30, 2023).
- [18] A. R. Diaz and A. López, “Mallado para simulaciones,” Facultad de Ingeniería Universidad Nacional de Asunción.
- [19] Blackdokimech, “Control de mallado,” 2021. <https://www.youtube.com/watch?v=i89rCKTPeSM> (accessed Apr. 26, 2024).
- [20] Z. Bi, *Finite element analysis applications: a systematic and practical approach*, 1st ed. Academic Press, 2018.
- [21] A. R. Rizzo, “Estimating errors in FE analyses,” *Mechanical Engineering-CIME*, vol. 113,

- no. 5. pp. 61–64, 1991.
- [22] ANSYS INC. HELP, “3-D 2-NODE BEAM.” 2023, Accessed: Oct. 15, 2023. [Online]. Available:
https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v192/ans_elem/Hlp_E_BEAM188.html.
- [23] J. N. Reddy, *An Introduction to Finite Element Method*, 3rd ed. McGrawHill, 2006.
- [24] THE EFFICIENT ENGINEER, “Understanding the Finite Element Method,” *Mechanics of Materials*, 2023. <https://efficientengineer.com/finite-element-method/> (accessed Nov. 18, 2023).
- [25] IME Group, “Mesh Quality Analysis: Jacobian,” *FEA*, 2023.
- [26] ESAMD - Engineering Science Analysis Manufacturing & Design, “Jacobian Ratio - Surface Mesh Quality,” 2015. <https://www.esacorp.com/toc/checking-surface-mesh-quality-jacobian-ratio/> (accessed May 15, 2023).
- [27] ANSYS INC. HELP, “Jacobian Ratio.” ANSYS, 2023, Accessed: Dec. 10, 2023. [Online]. Available:
[https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v232/en/discovery/UDA/user_manual/meshing/topics/c_mesh_jacobian_ratio.html?q=jacobian ratio](https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v232/en/discovery/UDA/user_manual/meshing/topics/c_mesh_jacobian_ratio.html?q=jacobian%20ratio).
- [28] J. R. Fisher Fernández, “Análisis de estabilidad dinámica en chumacera híbrida con CDF,” Instituto Politécnica Nacional, 2011.
- [29] L. Nagendran, “In finite element analysis, what is Jacobian Points.” Quora, 2021.
- [30] N. Ahmad, “What is Jacobian in FEA.” Quora, 2018, [Online]. Available:
<https://www.quora.com/What-is-Jacobian-in-FEA>.
- [31] ANSYS INC. HELP, “Mesh Metric Jacobian Ratio.” ANSYS, 2023, Accessed: Dec. 10, 2023. [Online]. Available:
https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v232/en/wb_

msh/msh_jacobian_ratio.html?q=jacobian ratio.

- [32] ANSYS INC., “Mesh Quality and Advanced Topics. Introduction to ANSYS Meshing,” *Release 2019 R2*, pp. 1–19, 2019.
- [33] ANSYS INC. HELP, “Error and Warning Limits.” ANSYS, 2024, Accessed: Jan. 05, 2024. [Online]. Available: https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v232/en/wb_msh/ds_Shape_Checking.html.
- [34] Ansys inc. Help, “Integration Point Locations.” ANSYS, 2024, Accessed: Jan. 05, 2024. [Online]. Available: https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v232/en/ans_thry/thy_et1.html.
- [35] ANSYS INC. HELP, “Nodal and Centroidal Data Evaluation.” ANSYS, 2024, Accessed: Jan. 05, 2024. [Online]. Available: https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v232/en/ans_thry/thy_et6.html?q=nodal and centroidal data evaluation.
- [36] ANSYS INC. HELP, “PLANE 182 - 2D 4-Node Structural Solid.” ANSYS, 2023, Accessed: Oct. 03, 2023. [Online]. Available: https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v232/en/ans_thry/thy_el182.html.
- [37] ANSYS INC. HELP, “2D and Axisymmetric Solids.” ANSYS, 2023, Accessed: Oct. 03, 2023. [Online]. Available: https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v232/en/ans_thry/thy_shp6.html%23thyeq1quad4q8nov1501.
- [38] ANSYS INC. HELP, “PLANE183 -2D 8-Node Structural Solid.” ANSYS, 2023, Accessed: Oct. 03, 2023. [Online]. Available: https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v232/en/ans_thry/thy_el183.html.

- [39] ANSYS INC. HELP, “SOLID185 - 3D 8-Node Structural Solid.” ANSYS, 2023, Accessed: Oct. 03, 2023. [Online]. Available: https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v232/en/ans_thry/thy_el185.html?q=SOLID185.
- [40] ANSYS INC. HELP, “3D Solids.” ANSYS, 2023, Accessed: Oct. 04, 2023. [Online]. Available: https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v232/en/ans_thry/thy_shp8.html%23thyeq1brick20nov1501.
- [41] ANSYS INC. HELP, “SOLID186 - 3D 20-Node Structural Solid.” ANSYS, 2023, Accessed: Oct. 03, 2023. [Online]. Available: https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v232/en/ans_thry/thy_el186.html?q=SOLID186.
- [42] MINITAB, “Tabla de coeficientes codificados para analizar variabilidad,” *Soporte de Minitab*. 2024, Accessed: May 13, 2024. [Online]. Available: <https://support.minitab.com/es-mx/minitab/help-and-how-to/statistical-modeling/doe/how-to/factorial/analyze-variability/interpret-the-results/all-statistics-and-graphs/coded-coefficients-table/>.
- [43] H. Gutiérrez Pulido and R. De la Vara Salazar, *Análisis y diseño de experimentos*, 2nd ed. México: McGrawHill, 2008.
- [44] MINITAB Blog Editor, “Entendiendo las Pruebas de Hipótesis: niveles de significancia (alfa) y valores P en estadística,” *Análisis de datos estadísticos*. 2019, Accessed: May 13, 2024. [Online]. Available: <https://blog.minitab.com/es/entendiendo-las-pruebas-de-hipotesis-niveles-de-significancia-alfa-y-valores-p-en-estadistica>.
- [45] MINITAB, “Reducción del modelo,” *Soporte de Minitab*. 2024, Accessed: May 13, 2024. [Online]. Available: <https://support.minitab.com/es-mx/minitab/help-and-how-to/statistical-modeling/regression/supporting-topics/regression-models/model-reduction/>.
- [46] MINITAB, “Tabla Resumen del modelo para analizar diseño factorial,” *Soporte de Minitab*.

-
- 2024, Accessed: May 13, 2024. [Online]. Available: <https://support.minitab.com/es-mx/minitab/help-and-how-to/statistical-modeling/doe/how-to/factorial/analyze-factorial-design/interpret-the-results/all-statistics-and-graphs/model-summary-table/>.
- [47] MINITAB, “Diseños factoriales y factoriales fraccionados,” *Soporte de Minitab*. 2024, Accessed: Mar. 07, 2024. [Online]. Available: <https://support.minitab.com/es-mx/minitab/help-and-how-to/statistical-modeling/doe/supporting-topics/factorial-and-screening-designs/factorial-and-fractional-factorial-designs/>.
- [48] C.-M. M. De, Z.-L. Vera, and C.-H. Goicoechea, “Diseño experimental y optimización de sistemas con múltiples respuestas,” pp. 1–143, 2016.
- [49] MINITAB, “Diseños de Plackett-Burman,” *Soporte de Minitab*. 2024, Accessed: May 13, 2024. [Online]. Available: <https://support.minitab.com/es-mx/minitab/help-and-how-to/statistical-modeling/doe/supporting-topics/factorial-and-screening-designs/plackett-burman-designs/>.
- [50] K. Jalammanavar, N. Pujar, and R. Vishnu Raj, “Finite Element Study on Mesh Discretization Error Estimation for Ansys Workbench,” *Proc. Int. Conf. Comput. Tech. Electron. Mech. Syst. CTEMS 2018*, pp. 344–350, 2018, doi: 10.1109/CTEMS.2018.8769258.
- [51] J. R. Cho, “An error-driven grid refinement for 2-D reliable crack analysis by enriched natural element method,” *Eng. Fract. Mech.*, vol. 238, no. July, p. 107272, 2020, doi: 10.1016/j.engfracmech.2020.107272.
- [52] C. Shah, “Mesh Discretization Error and Criteria for Accuracy of Finite Element Solutions,” *Int. ANSYS Conf.*, p. 12, 2002.
- [53] I. Koutromanos, *Fundamentals of Finite Element Analysis. Linear Finite Element Analysis*, 1st ed. John Wiley & sons, 2018.
- [54] S. Rangavajhala, V. S. Sura, V. K. Hombal, and S. Mahadevan, “Discretization error estimation in multidisciplinary simulations,” *AIAA J.*, vol. 49, no. 12, pp. 2673–2683, 2011,

- doi: 10.2514/1.J051085.
- [55] H. Schmidt, T. Alber, T. Wehner, R. Blakytyn, and H. J. Wilke, “Discretization error when using finite element models: Analysis and evaluation of an underestimated problem,” *J. Biomech.*, vol. 42, no. 12, pp. 1926–1934, 2009, doi: 10.1016/j.jbiomech.2009.05.005.
- [56] B. Prabhune, S. Sridhara, and K. Suresh, “Tangled finite element method for handling concave elements in quadrilateral meshes,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 123, no. 7, pp. 1576–1605, 2021, [Online]. Available: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.6907>.
- [57] J. M. Navarro-Jiménez, M. Tur, J. Albelda, and J. J. Ródenas, “Large deformation frictional contact analysis with immersed boundary method,” *Comput. Mech.*, vol. 62, no. 4, pp. 853–870, 2018, doi: 10.1007/s00466-017-1533-x.
- [58] P. Thieffry, “Best of Both Worlds: Combining APDL with ANSYS Workbench for Structural Simulations,” *ANSYS Advantage Volume IV, Issue 1*, pp. 48–50, 2010.
- [59] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, “A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 24, no. 2, pp. 337–357, 1987, doi: 10.1002/nme.1620240206.
- [60] N. Naik, R. Bhat, P. Shenoy, G. Varghese, and C. S. Suhas Kowshik, “A study on energy norm as an alternate approach to mesh convergence on circumferential disk dovetail of aircraft engine compressor,” *Int. J. Mech. Eng. Technol.*, vol. 9, no. 13, pp. 1293–1301, 2018.
- [61] C. Lee and P. S. Lee, “A new strain smoothing method for triangular and tetrahedral finite elements,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 341, pp. 939–955, 2018, doi: 10.1016/j.cma.2018.07.022.
- [62] Release 18.2 ANSYS INC, “PRERR,” Budapest, 2017. [Online]. Available: https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/ans_help_v182/ans_cmd/Hlp_C_PRERR.html.
- [63] Release 18.2 ANSYS INC, “SOLID65,” Budapest, 2017. [Online]. Available:

- https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/ans_help_v182/ans_elem/Hlp_E_SOLID65.html.
- [64] Release 18.2 ANSYS INC, “POST1 - Error Approximation Technique,” Budapest, 2017. [Online]. Available: https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/ans_help_v182/ans_thry/thy_post7.html.
- [65] W. D. Pilkey, D. F. Pilkey, and Z. Bi, *Peterson’s stress concentration factors*, 4th ed. Wiley, 2020.
- [66] ANSYS INC. HELP, “Patch Independent Algorithm for Tetrahedrons Method Control,” ANSYS. 2024, Accessed: Feb. 20, 2024. [Online]. Available: https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v241/en/wb_msh/msh_Patch_Ind_Algor.html.
- [67] ANSYS INC. HELP, “Element size,” ANSYS. 2024, Accessed: Feb. 20, 2024. [Online]. Available: https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v241/en/wb_msh/msh_Element_Size.html.
- [68] ANSYS INC. HELP, “Meshing options,” ANSYS. 2024, Accessed: Feb. 20, 2024. [Online]. Available: https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v241/en/wb_msh/msh_optlist.html%23msh_opts_sizing_bhead.
- [69] ANSYS INC. HELP, “Physics preference,” ANSYS. 2024, Accessed: Feb. 20, 2024. [Online]. Available: https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v241/en/wb_msh/msh_phy_pref.html.
- [70] G. Jan, “Difference between Octree and Delaunay Mesh,” *ANSYS Meshing & Geometry*, 2019. <https://www.cfd-online.com/Forums/ansys-meshing/214276-difference-between-octree-delaunay-mesh.html> (accessed Mar. 01, 2024).
- [71] CFD Group, “ICEM CFD training course,” *The most complete ICEM training course and*

- meshing in ANSYS*, 2024. <https://cfdgroup.co/product/icem-cfd-course/> (accessed Mar. 01, 2024).
- [72] ANSYS INC. HELP, “Curvature Normal Angle,” *ANSYS*. 2024, Accessed: Feb. 21, 2024. [Online]. Available: https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v241/en/wb_msh/msh_Curv_Nor_Ang_SF.html.
- [73] ANSYS INC. HELP, “Span Angle Center,” *ANSYS*. 2024, Accessed: Feb. 20, 2024. [Online]. Available: https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v241/en/wb_msh/msh_Span_Ang_Cent.html.
- [74] C. Téllez Martínez, “Diseño Factorial Teoría,” 2014. <https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=V2PopChdlPY> (accessed Mar. 15, 2024).